

Examen de statistique

Exercice 1 : On considère des variables aléatoires i.i.d $X_1, \dots, X_n$ ayant pour densité f_θ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_\theta(x) = \frac{3\theta^3}{x^4} \mathbf{1}_{x \geq \theta}.$$

avec $\theta > 0$.

1. Montrer que

$$\mathbb{E}[X] = \frac{3}{2}\theta \quad \text{et} \quad \mathbb{V}[X] = \frac{3}{4}\theta^2.$$

2. En déduire un estimateur de θ , que l'on notera θ_n . Est-il consistant ?
3. Donner sa normalité asymptotique.
4. Soit $\alpha \in (0, 1)$, construire un intervalle de confiance asymptotique de θ de niveau $1 - \alpha$.
5. Soit $\theta_0 > 0$, en déduire un test asymptotique de niveau α pour tester

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{contre} \quad H_1 : \theta \neq \theta_0.$$

6. Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance est $\hat{\theta}_n = X_{(1)}$ où $X_{(1)} = \min X_i$.
7. Donner la convergence en loi de $n(\hat{\theta}_n - \theta)$.
8. Construire un intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ de la forme

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = [\hat{\theta}_n c_\alpha; \hat{\theta}_n]$$

9. Soit $\theta_0 > 0$, construire un test de taille α pour tester

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \quad \text{contre} \quad \theta > \theta_0.$$

10. Soit $x_{(1)}$ une réalisation de $X_{(1)}$. Calculer la p -valeur associée. On prendra la convention $\inf(\emptyset) = 0$.

Exercice 2 : On considère des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ i.i.d avec $X_1 \sim \mathcal{N}(0, \theta)$ et $\theta > 0$.

1. Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance est

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2.$$

2. Donner la loi de $\frac{n\hat{\theta}_n}{\theta}$. On admettra que l'on connaît ses quantiles.
3. Soit $\alpha \in (0, 1)$. En déduire un intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ de θ .
4. Soit $\theta_0 > 0$, en déduire un test de niveau α pour tester

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{contre} \quad H_1 : \theta \neq \theta_0.$$

Rappel sur le test du rapport de vraisemblance : Soit $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ un échantillon et on suppose que X_1 admet une densité f_θ avec $\theta \in \Theta$. Soit $\theta_0, \theta_1 \in \Theta$, on souhaite tester

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{contre} \quad H_1 : \theta = \theta_1.$$

On considère le rapport de vraisemblance

$$\Phi(\mathbf{X}) = \frac{L_{\mathbf{X}}(\theta_1)}{L_{\mathbf{X}}(\theta_0)} = \frac{\prod_{i=1}^n f_{\theta_1}(X_i)}{\prod_{i=1}^n f_{\theta_0}(X_i)}.$$

Le test (de niveau α) de rapport de vraisemblance consiste à construire une zone de rejet de la forme

$$ZR = \left\{ \frac{\prod_{i=1}^n f_{\theta_1}(X_i)}{\prod_{i=1}^n f_{\theta_0}(X_i)} > c_\alpha \right\} \quad \text{avec} \quad \mathbb{P}_{\theta_0} \left[\frac{\prod_{i=1}^n f_{\theta_1}(X_i)}{\prod_{i=1}^n f_{\theta_0}(X_i)} > c_\alpha \right] = \alpha.$$

Exercice 3 : On considère des variables aléatoires i.i.d $X_1, \dots, X_n$ admettant pour densité

$$f_\theta(x) = \frac{\theta}{x^{\theta+1}} \mathbf{1}_{x \geq 1}$$

avec $\theta > 0$.

1. Montrer que $\log(X_1) \sim \mathcal{E}(\theta)$.
2. On admettra que si on a $Y_1, \dots, Y_n \sim \mathcal{E}(\theta)$, alors $\theta \sum_{i=1}^n Y_i$ suit une loi gamma de paramètre $n, 1$ dont on connaît les quantiles. On notera γ_α le quantile d'ordre α de cette loi. Soit $\theta_0 > \theta_1 > 0$. Tester au niveau α

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{contre} \quad H_1 : \theta = \theta_1.$$