

CC2 de statistique

Exercice 1 : On considère des variables aléatoires i.i.d $X_1, \dots, X_n$ avec $X_1 \sim U[0, \theta^2]$ où $\theta > 0$.

1. Donner l'espérance de X_1 .
2. En déduire un estimateur de θ que l'on notera $\hat{\theta}_n$.
3. Est-il convergent ?
4. Donner sa normalité asymptotique.
5. Soit $\alpha \in (0, 1)$, construire un intervalle de confiance asymptotique de niveau $1 - \alpha$.
6. Soit $\theta_0 > 0$, en déduire un test asymptotique de niveau α pour tester

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{contre} \quad H_1 : \theta \neq \theta_0$$

7. Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance est $\hat{\theta}_n = \sqrt{X_{(n)}}$, où $X_{(n)} = \max X_i$.
8. Donner la convergence en loi de $n(\theta - \hat{\theta}_n)$.
9. Construire un intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ de la forme

$$[\hat{\theta}_n; \hat{\theta}_n c_\alpha].$$

10. Soit $\theta_0 > 0$, construire un test de taille α pour tester

$$H_0 : \theta \geq \theta_0 \quad \text{contre} \quad \theta < \theta_0.$$