

CC1 de statistique

Exercice 1 : question de cours. Donner la définition d'un estimateur fortement consistant.

Exercice 2 : méthode delta. On considère des X_i i.i.d et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sqrt{n} (\bar{X}_n - e^\theta) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, e^{2\theta}).$$

Appliquer la méthode delta avec la fonction g définie pour tout $x > 0$ par $g(x) = \log(x)$.

Correction : On a $g'(x) = 1/x$ et g est donc dérivable en e^θ avec $g'(e^\theta) = e^{-\theta}$. On obtient donc

$$\sqrt{n} (\log(\bar{X}_n) - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Exercice 3 : méthode des moments. On considère des variable aléatoires $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. et positives, et $\theta > 0$ tels que $\mathbb{E}[X_1] = \sqrt{\theta + 1}$.

1. A l'aide de la méthode des moments, proposer un estimateur de θ .
2. Montrer qu'il est consistant.
3. On suppose maintenant que l'on a également $\mathbb{V}[X_1] = \theta + 1$, montrer que l'estimateur obtenue dans la question 1 est asymptotiquement normal.

Correction : .

1. On a $\theta = \mathbb{E}[X]^2 - 1 = g(\mathbb{E}[X])$ avec $g(x) = x^2 - 1$. On a donc l'estimateur $\hat{\theta}_n = g(\bar{X}_n)$.
2. Par la loi des grands nombres, on a

$$\bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} \sqrt{\theta + 1}$$

et g continue en $\sqrt{\theta + 1}$ et donc, par le théorème de continuité,

$$\hat{\theta}_n = g(\bar{X}_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} g(\sqrt{\theta + 1}) = \theta.$$

3. On a le TLC

$$\sqrt{n} (\bar{X}_n - \sqrt{\theta + 1}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \theta + 1).$$

On a $g'(x) = 2x$ et donc g est dérivable en $\sqrt{\theta + 1}$ avec $g'(\sqrt{\theta + 1}) = 2\sqrt{\theta + 1}$. On obtient donc, par la méthode delta

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) = \sqrt{n}\left(g(\bar{X}_n) - g(\sqrt{\theta + 1})\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 4(\theta + 1)^2).$$