

CC1 de statistique

Exercice 1 : question de cours. Donner la définition d'un estimateur fortement consistant.

Exercice 2 : méthode delta. On considère des X_i i.i.d et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sqrt{n} (\bar{X}_n - \theta^2) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \theta^4).$$

Appliquer la méthode delta avec la fonction g définie pour tout $x > 0$ par $g(x) = \sqrt{x}$.

Correction : On a $g'(x) = 1/2\sqrt{x}$ et g est donc dérivable en θ^2 avec $g'(\theta^2) = 1/2\theta$. On obtient donc

$$\sqrt{n} (\log(\bar{X}_n) - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\theta^2}{4}\right).$$

Exercice 3 : méthode des moments. On considère des variable aléatoires $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. et $\theta \in (0, 1)$ tels que $\mathbb{E}[X_1] = \log(1 - \theta)$.

1. A l'aide de la méthode des moments, proposer un estimateur de θ .
2. Montrer qu'il est consistant.
3. On suppose maintenant que l'on a également $\mathbb{V}[X_1] = 1$, montrer que l'estimateur obtenue dans la question 1 est asymptotiquement normal.

Correction :

1. On a $\theta = 1 - e^{\mathbb{E}[X_1]} = g(\mathbb{E}[X])$ avec $g(x) = 1 - e^x$. On a donc l'estimateur $\hat{\theta}_n = g(\bar{X}_n)$.
2. Par la loi des grands nombres, on a

$$\bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} \log(1 - \theta)$$

et g continue en $\log(1 - \theta)$ et donc, par le théorème de continuité,

$$\hat{\theta}_n = g(\bar{X}_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} g(\log(1 - \theta)) = \theta.$$

3. On a le TLC

$$\sqrt{n} (\bar{X}_n - \log(1 - \theta)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

On a $g'(x) = -e^x$ et donc g est dérivable en $\log(1 - \theta)$ avec $g'(\log(1 - \theta)) = \theta - 1$. On obtient donc, par la méthode delta

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) = \sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(\log(1 - \theta))) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, (\theta - 1)^2).$$