Eléments de statistique

Théorèmes asymptotiques et opérations sur les limites

A. Godichon-Baggioni

I. Théorèmes asymptotiques

Loi faible des Grands Nombres

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, on note

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Théorème (Loi faible des Grands Nombres)

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées admettant une moyenne $m = \mathbb{E}[X_1]$, alors

$$\overline{X}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}} m.$$

Loi Forte des Grands Nombres

Théorème (Loi Forte des Grands Nombres)

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées admettant une moyenne $m = \mathbb{E}[X_1]$, alors

$$\overline{X}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s} m.$$

Exemple : lancer de pièce On considère des v.a i.i.d X_i suivant une Bernoulli de paramètre $\theta \in (0, 1)$, on a

$$\overline{X}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s} \theta.$$

Lancer de pièce

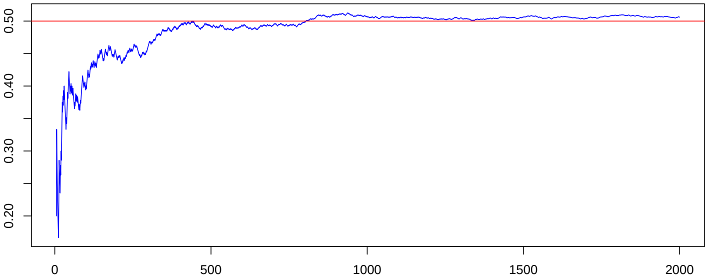

Figure – Evolution en fonction de n d'une réalisation de $\overline{X}_n$ avec $\theta = 0.5$

Théorème Central Limite

Théorème (Théorème Central Limite)

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de moyenne $m = \mathbb{E}[X_1]$ et de variance $\sigma^2 = \mathbb{V}[X_1]$, alors

$$\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - m\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$$

ce que l'on peut écrire comme

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\overline{X}_n - m\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Lancer de pièce équilibrée

Dans le cas du lancer de pièce, on a $\mathbb{E}\left[X_1\right] = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{V}\left[X_1\right] = \frac{1}{4}$, et donc

$$\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \frac{1}{2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{4}\right),$$

ce que l'on peut écrire comme

$$P_n := 2\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \frac{1}{2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

LANCER DE PIÈCE ÉQUILIBRÉE

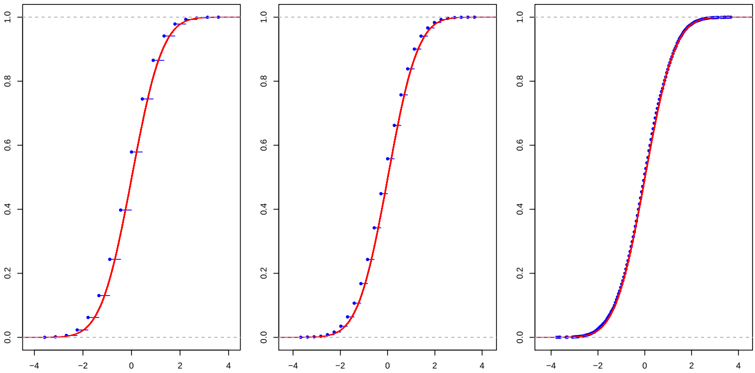

FIGURE – Fonctions de répartition de P_n (en bleu) et d'une loi normale centrée réduite (en rouge) pour $n = 20$ (à gauche) $n = 50$ (au centre) et $n = 2000$ (à droite).

II. Opérations sur les limites

OPÉRATION SUR LES LIMITES

Exemple : lancer de pièce On ne sait pas si la pièce est équilibrée. On a

$$\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \theta\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \theta\left(1-\theta\right)\right),$$

ce que l'on peut écrire comme

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\theta(1-\theta)}}\left(\overline{X}_n - \theta\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Théorème de continuité

Théorème (Théorème de continuité)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires et soit X une variable aléatoire. Soit g une fonction dont l'ensemble des points de discontinuité est noté D_g. Si $\mathbb{P}\left[X \in D_g\right] = 0$, alors la suite $g\left(X_n\right)$ hérite du mode de convergence de la suite (X_n), i.e

1. *Si (X_n) converge presque sûrement vers X, alors $g\left(X_n\right)$ converge presque sûrement vers $g\left(X\right)$.*
2. *Si (X_n) converge en probabilité vers X, alors $g\left(X_n\right)$ converge en probabilité vers $g\left(X\right)$.*
3. *Si (X_n) converge en loi vers X, alors $g\left(X_n\right)$ converge en loi vers $g\left(X\right)$.*

Théorème de continuité (remarque)

Remarque : Le théorème de continuité n'est généralement pas vrai pour la convergence en moyenne quadratique.

Contre-exemple : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n^3} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}[X_n = n] = \frac{1}{n^3},$$

et la fonction $g : x \longmapsto x^2$.

Lancer de pièce

Si $\theta \in (0,1)$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{\overline{X}_n\left(1-\overline{X}_n\right)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} \frac{1}{\sqrt{\theta(1-\theta)}}.$$

et en particulier

$$\frac{\sqrt{\theta(1-\theta)}}{\sqrt{\overline{X}_n\left(1-\overline{X}_n\right)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} 1.$$

Théorème de Slutsky

Théorème (Théorème de Slutsly)
Soient (X_n) et (Y_n) des suites de variables aléatoires telles que (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire X et (Y_n) converge en probabilité vers une constante c, alors

$$X_n + Y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} X + c \qquad X_n Y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} cX.$$

Exemple : lancer de pièce On a

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\overline{X}_n \left(1 - \overline{X}_n\right)}} \left(\overline{X}_n - \theta\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Théorème de Slutsky (remarque)

Remarque : Le théorème de Slutsky est généralement faux si Y_n converge en loi vers une variable aléatoire.

Contre-exemple : Soient $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et (X_n) , (Y_n) deux suite de variables aléatoires définie pour tout $n \geq 1$ par $X_n = -X$ et $Y_n = X$.

Théorème Central Limite et convergence en probabilité

Corollaire

Soit (v_n) *une suite déterministe tendant vers* $+\infty$, (X_n) *une suite de variables aléatoires,* X *une variable aléatoire et* a *une une constante telles que*

$$v_n\left(X_n - a\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X,$$

alors

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} a.$$

En particulier, si

$$\sqrt{n}\left(X_n - a\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X,$$

alors

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} a.$$

DELTA MÉTHODE

Théorème (Delta Méthode)

Soient (X_n) une suite de variables aléatoires, (v_n) une suite de réels tendant vers $+\infty$, X une variable aléatoire et a une constante telles que

$$\sqrt{v_n}\left(X_n - a\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X.$$

Soit g une fonction dérivable en a, alors

$$\sqrt{v_n}\left(g\left(X_n\right) - g(a)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} g'(a)X.$$

En particulier, si il existe $\sigma^2 > 0$ tel que

$$\sqrt{v_n}\left(X_n - a\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right),$$

alors

$$\sqrt{v_n}\left(g\left(X_n\right) - g(a)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \left(g'(a)\right)^2 \sigma^2\right).$$

Lancer de pièce

Exemple : lancer de pièce Soit $\theta \in (0,1)$. Supposons que l'on s'intéresse à l'estimation de $\frac{1}{\theta}$. On a

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{\overline{X}_n} - \frac{1}{\theta}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1-\theta}{\theta^3}\right).$$