Statistique inférentielle

Convergence de suites de variables aléatoires

A. Godichon-Baggioni

I. Rappels de probabilités

Fonctions de répartition

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire. La fonction de répartition $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ de X est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$F_X(x) = \mathbb{P}\left[X \leq x\right].$$

Elle est croissante, continue à droite et

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0,$$
$$\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1.$$

EXEMPLES :

1. Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-p & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

2. Si X suit une loi uniforme sur $[0, 1]$,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

3. Si X suit une loi normale centrée réduite,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

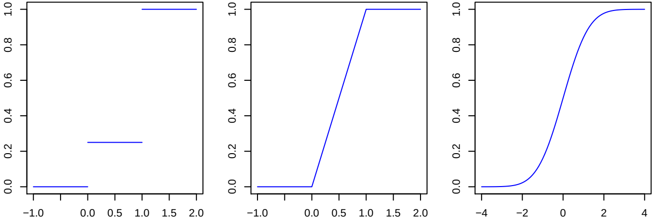

FIGURE – Fonctions de répartition d'une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0.75$ (à gauche), d'une loi uniforme (au centre) et d'une loi normale centrée réduite (à droite).

II. Modes de convergence

Convergences de variables aléatoires

On considère une suite de variables aléatoires (X_n) et on s'intéresse à ses différents modes de convergence, i.e

- Convergence en loi
- Convergence en probabilité
- Convergence presque sûre
- Convergence en moyenne quadratique

Convergence en loi

Définition

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires. On dit que (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire X et on note

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$$

si pour toute fonction continue bornée φ, on a

$$\mathbb{E}\left[\varphi\left(X_n\right)\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}\left[\varphi\left(X\right)\right].$$

De manière équivalente, on dit que (X_n) converge en loi vers X si pour toute fonction uniformément continue et bornée φ, on a

$$\mathbb{E}\left[\varphi\left(X_n\right)\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}\left[\varphi\left(X\right)\right].$$

Exemples

Exemple 1 : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \geq 1$, $X_n \sim \mathcal{B}\left(p + \frac{1-p}{n}\right)$, alors

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X \sim \mathcal{B}(p).$$

Exemple 2 : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \geq 1$, $X_n = -X$, où $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, alors

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X.$$

Exemple 3 : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \geq 1$, $X_n \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 + \frac{1}{n}\right)$, alors

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$$

Convergence en loi

Proposition

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires. X_n converge en loi vers une variable aléatoire X si et seulement si en tout point de continuité x de la fonction de répartition F_X de X on a

$$F_{X_n}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F_X(x).$$

Exemples

Exemple 1 : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \geq 1$, $X_n \sim \mathcal{B}\left(p + \frac{1-p}{n}\right)$, alors

$$X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} X \sim \mathcal{B}(p).$$

Exemple 2 : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \geq 1$, $X_n = -X$, où $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors

$$X_n \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} X.$$

Exemple 3 : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \geq 1$, $X_n \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 + \frac{1}{n}\right)$, alors

$$X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} X \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$$

Convergence en loi

Corollaire

Soient (X_n) une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire telles que X_n, X sont absolument continues de densités f_n, f, alors X_n converge en loi vers X si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x).$$

Exemple 2 : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \geq 1$, $X_n = -X$, où $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X.$$

Exemple 3 : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \geq 1$, $X_n \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 + \frac{1}{n}\right)$, alors

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$$

Convergence en loi

Soit X une variable aléatoire, on rappelle que sa fonction caractéristique Φ_X est définie pour tout t par

$$\Phi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right].$$

Proposition

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires, X_n converge en loi vers X si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_{X_n}(t) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \Phi_X(t).$$

Exemple : lancers de pièce

On rappelle que X_i vaut 1 si le i-ème lancer veut "Pile" et 0 sinon, et on a donc $X_i \sim \mathcal{B}(\theta)$. Un estimateur naturel de θ est

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

alors

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \theta.$$

Convergence en probabilité

Définition

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires. On dit que (X_n) converge en probabilité vers X et on note

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$$

si pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left[|X_n - X| > \epsilon\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Exemple : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires, avec pour tout $n \geq 1$, $X_n \sim \mathcal{B}\left(\frac{p}{n}\right)$, où $p \in (0,1)$, alors

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

Convergence en loi Vs Convergence en probabilité

Proposition

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires. Si (X_n) converge en probabilité vers une variable aléatoire X, alors (X_n) converge en loi vers X.

Attention ! La réciproque est généralement fausse !

Contre-exemple : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires, avec $X_n = -X$, où $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Proposition

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires. Si (X_n) converge en loi vers une constante c, alors (X_n) converge en probabilité vers c.

Convergence presque sûre

Définition

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires. On dit que (X_n) converge presque sûrement vers X et on note

$$X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s} X$$

si

$$\mathbb{P}\left[\lim_{n \to +\infty} X_n = X\right] = \mathbb{P}\left[\left\{\omega \in \Omega; \quad \lim_{n \to +\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right] = 1.$$

Convergence presque sûre Vs convergence en probabilité

Proposition

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires. Si (X_n) converge presque sûrement vers une variable aléatoire X, alors (X_n) converge en probabilité vers X.

Attention ! La réciproque est généralement fausse !

Contre-exemple : Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0,1]$ et la suite d'évènements (A_n) définie par $A_1 = \{X \in [0,1]\}$, $A_2 = \{X \in [0,1/2]\}$, $A_3 = \{X \in [1/2,1]\}$, $A_4 = \{X \in [0,1/4]\}$,... Alors $Y_n = \mathbf{1}_{A_n}$ converge en probabilité vers 0 mais ne converge pas presque sûrement.

Convergence presque sûre Vs convergence en probabilité

Application du lemme de Borell-Cantelli : Si pour tout $\epsilon > 0$,

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left[|X_n - X| \geq \epsilon\right] < +\infty,$$

alors (X_n) converge presque sûrement vers X.

Exemple : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}\left[X_n = 0\right] = 1 - \frac{1}{n^2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}\left[X_n = n\right] = \frac{1}{n^2}.$$

Convergence en moyenne quadratique

Définition

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires de carré intégrable. On dit que (X_n) converge en moyenne quadratique vers X et on note

$$X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{L^2} X$$

si

$$\mathbb{E}\left[|X_n - X|^2\right] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Exemple : lancer de pièce $\hat{\theta}_n$ converge en moyenne quadratique vers θ.

Convergence en moyenne quadratique Vs convergence en probabilité

Proposition

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires. Si (X_n) converge en moyenne quadratique vers une variable aléatoire X, alors (X_n) converge en probabilité vers X.

Attention! La réciproque est généralement fausse!

Contre-exemple : Soit (X_n) la suite de variables aléatoires définie pour tout $n \geq 1$ par

$$\mathbb{P}[X_n = 0] = \frac{n-1}{n}, \qquad \mathbb{P}[X_n = n] = \frac{1}{n}.$$

RÉSUMÉ

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} X \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$$

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2} X \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$$

Remarque : Il n'y a pas d'implication "générale" entre convergence presque sûre et convergence en moyenne quadratique.

Contre-exemples

Contre-exemple 1 : moyenne quadratique $\not\Rightarrow$ presque sûre.
Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0,1]$ et la suite d'évènements (A_n) définie par $A_1 = \{X \in [0,1]\}$, $A_2 = \{X \in [0,1/2]\}$..., et on considère la suite $Y_n = \mathbf{1}_{A_n}$.

Contre-exemple 2 : presque sûre $\not\Rightarrow$ moyenne quadratique.
On considère une suite de variables aléatoires (X_n) telle que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}\left[X_n = 0\right] = 1 - \frac{1}{n^2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}\left[X_n = n\right] = \frac{1}{n^2}.$$

III.Inégalités classiques

Inégalité de Markov

Proposition (Inégalité de Markov)

Soient $c, p > 0$ et X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre p, on a

$$\mathbb{P}\left[|X| \geq c\right] \leq \frac{\mathbb{E}\left[|X|^p\right]}{c^p}.$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Corollaire (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Soit $c > 0$ et X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2*, alors*

$$\mathbb{P}\left[|X - \mathbb{E}[X]| \geq c\right] \leq \frac{\mathbb{V}[X]}{c^2}.$$

Exemple : lancer de pièce : On a pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left[\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| \geq \epsilon\right] \leq \frac{\theta(1-\theta)}{\epsilon^2 n}.$$

Inégalités de Cauchy-Schwarz

Théorème (**Inégalité de Cauchy-Schwarz**)

Soit X, Y deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2. Alors

$$\mathbb{E}\left[|XY|\right] \leq \sqrt{\mathbb{E}\left[X^2\right]\mathbb{E}\left[Y^2\right]}.$$

Exemple : Soit $(X_n), (Y_n)$ deux suites d'estimateurs convergeant en moyenne quadratique vers 0. On suppose qu'ils convergent également à l'ordre 4, i.e ils admettent des moments d'ordre 4 et

$$\mathbb{E}\left[|X_n - x|^4\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}\left[|Y_n - y|^4\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Alors X_nY_n converge en moyenne quadratique vers xy.

Inégalité de Hölder

Théorème (Inégalité de Hölder)

Soit X, Y deux variables aléatoires, et $p, q > 1$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si X admet un moment d'ordre p et si Y admet un moment d'ordre q, alors

$$\mathbb{E}\left[|XY|\right] \leq \left(\mathbb{E}\left[|X|^p\right]\right)^{\frac{1}{p}} \left(\mathbb{E}\left[|Y|^q\right]\right)^{\frac{1}{q}} .$$

Exemple 1 : Si X admet un moment d'ordre r, alors pour tout $r' \in (0, r)$,

$$\mathbb{E}\left[|X|^{r'}\right] \leq \left(\mathbb{E}\left[|X|^r\right]\right)^{\frac{r'}{r}} .$$

Exemple 2 : Soit (X_n) , (Y_n) deux suites d'estimateurs où X_n converge à l'ordre r vers 0, avec $2 < r < 4$, et Y_n converge à l'ordre $\frac{2r}{r-2}$ vers 0.

IV. Théorèmes asymptotiques

Loi faible des Grands Nombres

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, on note

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Théorème (Loi faible des Grands Nombres)

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées admettant une moyenne $m = \mathbb{E}[X_1]$, alors

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}} m.$$

Loi Forte des Grands Nombres

Théorème (Loi Forte des Grands Nombres)

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées admettant une moyenne $m = \mathbb{E}[X_1]$, alors

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s} m.$$

Exemple : lancer de pièce On a

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s} \theta.$$

Lancer de pièce

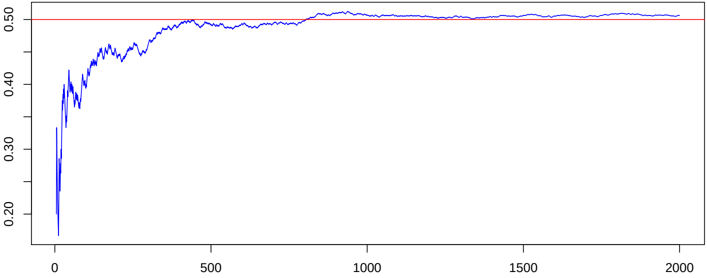

Figure – Evolution en fonction de n d'une réalisation de $\hat{\theta}_n$ avec $\theta = 0.5$

Théorème Central Limite

Théorème (Théorème Central Limite)

Soient $X_1, \ldots, X_n$ *des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de moyenne* $m = \mathbb{E}[X_1]$ *et de variance* $\sigma^2 = \mathbb{V}[X_1]$*, alors*

$$\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - m\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$$

ce que l'on peut écrire comme

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\frac{S_n}{n} - m\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Lancer de pièce équilibrée

Dans le cas du lancer de pièce, on a $\mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{V}[X_1] = \frac{1}{4}$, et donc

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \frac{1}{2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{4}\right),$$

ce que l'on peut écrire comme

$$P_n := 2\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \frac{1}{2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

LANCER DE PIÈCE ÉQUILIBRÉE

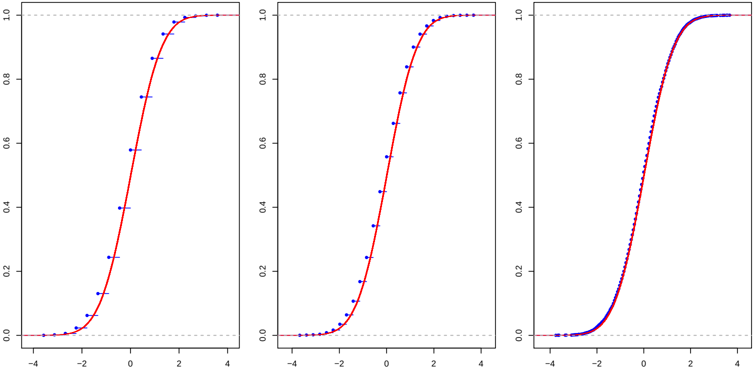

FIGURE – Fonctions de répartition de P_n (en bleu) et d'une loi normale centrée réduite (en rouge) pour $n = 20$ (à gauche) $n = 50$ (au centre) et $n = 2000$ (à droite).

V. Opérations sur les limites

Opération sur les limites

Exemple : lancer de pièce On ne sait pas si la pièce est équilibrée. On a

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \theta\left(1-\theta\right)\right),$$

ce que l'on peut écrire comme

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\theta(1-\theta)}}\left(\hat{\theta}_n - \theta\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Théorème de continuité

Théorème (**Théorème de continuité**)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires et c une constante. Soit g une fonction une fonction continue en c, alors la suite $g(X_n)$ hérite du mode de convergence de la suite (X_n), i.e

1. *Si (X_n) converge presque sûrement vers c, alors $g(X_n)$ converge presque sûrement vers $g(c)$.*
2. *Si (X_n) converge en probabilité vers c, alors $g(X_n)$ converge en probabilité vers $g(c)$.*
3. *Si (X_n) converge en loi vers c, alors $g(X_n)$ converge en loi vers $g(c)$.*

Théorème de continuité (remarque)

Remarque : Le théorème de continuité n'est généralement pas vrai pour la convergence en moyenne quadratique.

Contre-exemple : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}\left[X_n = 0\right] = 1 - \frac{1}{n^3} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}\left[X_n = n\right] = \frac{1}{n^3}.$$

LANCER DE PIÈCE

Si $\theta \in (0,1)$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{\hat{\theta}_n\left(1-\hat{\theta}_n\right)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} \frac{1}{\sqrt{\theta(1-\theta)}}.$$

et en particulier

$$\frac{\sqrt{\theta(1-\theta)}}{\sqrt{\hat{\theta}_n\left(1-\hat{\theta}_n\right)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} 1.$$

Théorème de Slutsky

Théorème (Théorème de Slutsly)

Soient (X_n) et (Y_n) des suites de variables aléatoires telles que (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire X et (Y_n) converge en probabilité vers une constante c, alors

$$X_n + Y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} X + c \qquad X_n Y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} cX.$$

Exemple : lancer de pièce On a

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\hat{\theta}_n \left(1 - \hat{\theta}_n\right)}} \left(\hat{\theta}_n - \theta\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Théorème de Slutsky (remarque)

Remarque : Le théorème de Slutsky est généralement faux si Y_n converge en loi vers une variable aléatoire.

Contre-exemple : Soient $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et (X_n) , (Y_n) deux suite de variables aléatoires définie pour tout $n \geq 1$ par $X_n = -X$ et $Y_n = X$.

Théorème Central Limite et convergence en probabilité

Corollaire

Soit (X_n) *une suite de variables aléatoires,* a *et* σ^2 *des constantes telles que*

$$\sqrt{n}\,(X_n - a) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right),$$

alors (X_n) *converge en probabilité vers* a*.*

Delta Méthode

Théorème (Delta méthode)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires, a, σ^2 des constantes telles que

$$\sqrt{n}\left(X_n - a\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right),$$

alors

$$\sqrt{n}\left(g\left(X_n\right) - g\left(a\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \left(g'(a)\right)^2 \sigma^2\right).$$

Lancer de pièce

Exemple : lancer de pièce Soit $\theta \in (0,1)$. Supposons que l'on s'intéresse à l'estimation de $\frac{1}{\theta}$. On a

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{\hat{\theta}_n} - \frac{1}{\theta}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1-\theta}{\theta^3}\right).$$