Mise à niveau

Rappels de probabilités

A. Godichon-Baggioni

I. Modes de convergence

Convergences de variables aléatoires

On considère une suite de variables aléatoires (X_n) et on s'intéresse à ses différents modes de convergence, i.e

- Convergence en loi
- Convergence en probabilité
- Convergence presque sûre
- Convergence en moyenne quadratique

Convergence en loi

Définition

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires. On dit que (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire X et on note

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$$

si pour toute fonction continue bornée φ, on a

$$\mathbb{E}\left[\varphi\left(X_n\right)\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}\left[\varphi\left(X\right)\right].$$

De manière équivalente, on dit que (X_n) converge en loi vers X si pour toute fonction uniformément continue et bornée φ, on a

$$\mathbb{E}\left[\varphi\left(X_n\right)\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}\left[\varphi\left(X\right)\right].$$

EXEMPLES

Exemple 1 : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \geq 1$, $X_n \sim \mathcal{B}\left(p + \frac{1-p}{n}\right)$, alors

$$X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} X \sim \mathcal{B}(p).$$

Exemple 2 : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \geq 1$, $X_n = -X$, où $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, alors

$$X_n \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} X.$$

Convergence en loi

Proposition

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires. X_n converge en loi vers une variable aléatoire X si et seulement si en tout point de continuité x de la fonction de répartition F_X de X on a

$$F_{X_n}(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} F_X(x).$$

EXEMPLES

Exemple 1 : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \geq 1$, $X_n \sim \mathcal{B}\left(p + \frac{1-p}{n}\right)$, alors

$$X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} X \sim \mathcal{B}(p).$$

Exemple 2 : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \geq 1$, $X_n = -X$, où $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, alors

$$X_n \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} X.$$

Convergence en loi

Corollaire

Soient (X_n) une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire telles que X_n, X sont absolument continues de densités f_n, f, alors X_n converge en loi vers X si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x).$$

Exemple 1 : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \geq 1$, $X_n \sim \mathcal{B}\left(p + \frac{1-p}{n}\right)$, alors

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{B}(p).$$

Exemple 2 : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \geq 1$, $X_n = -X$, où $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X.$$

Convergence en loi

Soit X une variable aléatoire, on rappelle que sa fonction caractéristique Φ_X est définie pour tout t par

$$\Phi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right].$$

Proposition

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires, X_n converge en loi vers X si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Phi_X(t).$$

Application : Théorème Central Limite (cf suite)

Convergence en probabilité

Définition

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires. On dit que (X_n) converge en probabilité vers X et on note

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$$

si pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left[|X_n - X| > \epsilon\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Exemple : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires, avec pour tout $n \geq 1$, $X_n \sim \mathcal{B}\left(\frac{p}{n}\right)$, où $p \in (0,1)$, alors

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

Convergence en loi Vs Convergence en probabilité

Proposition

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires. Si (X_n) converge en probabilité vers une variable aléatoire X, alors (X_n) converge en loi vers X.

Attention ! La réciproque est généralement fausse !

Contre-exemple : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires, avec $X_n = -X$, où $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Proposition

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires. Si (X_n) converge en loi vers une constante c, alors (X_n) converge en probabilité vers c.

Convergence presque sûre

Définition

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires. On dit que (X_n) converge presque sûrement vers X et on note

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} X$$

si

$$\mathbb{P}\left[\lim_{n\to+\infty} X_n = X\right] = \mathbb{P}\left[\left\{\omega \in \Omega; \quad \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right] = 1.$$

Convergence presque sûre Vs convergence en probabilité

Proposition

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires. Si (X_n) converge presque sûrement vers une variable aléatoire X, alors (X_n) converge en probabilité vers X.

Attention ! La réciproque est généralement fausse !

Convergence presque sûre Vs convergence en probabilité

Application du lemme de Borell-Cantelli : Si pour tout $\epsilon > 0$,

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}\left[|X_n - X| \geq \epsilon\right] < +\infty,$$

alors (X_n) converge presque sûrement vers X.

Exemple : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}\left[X_n = 0\right] = 1 - \frac{1}{n^2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}\left[X_n = n\right] = \frac{1}{n^2}.$$

Convergence en moyenne quadratique

Définition

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires de carré intégrable. On dit que (X_n) converge en moyenne quadratique vers X et on note

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2} X$$

si

$$\mathbb{E}\left[|X_n - X|^2\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Exemple : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}\left[X_n = 0\right] = \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}\left[X_n = 1\right] = 1 - \frac{1}{n}.$$

CONVERGENCE EN MOYENNE QUADRATIQUE VS CONVERGENCE EN PROBABILITÉ

Proposition

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires. Si (X_n) converge en moyenne quadratique vers une variable aléatoire X, alors (X_n) converge en probabilité vers X.

Attention ! La réciproque est généralement fausse !

Contre-exemple : Soit (X_n) la suite de variables aléatoires définie pour tout $n \geq 1$ par

$$\mathbb{P}[X_n = 0] = \frac{n-1}{n}, \qquad \mathbb{P}[X_n = n] = \frac{1}{n}.$$

RÉSUMÉ

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} X \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$$

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2} X \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$$

Remarque : Il n'y a pas d'implication "générale" entre convergence presque sûre et convergence en moyenne quadratique.

Contre-exemple 1 : moyenne quadratique $\not\Rightarrow$ presque sûre.
TD

Contre-exemple 2 : presque sûre $\not\Rightarrow$ moyenne quadratique.
On considère une suite de variables aléatoires (X_n) telle que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n^2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}[X_n = n] = \frac{1}{n^2}.$$

II.Inégalités classiques

Inégalité de Markov

Proposition (Inégalité de Markov)

Soient $c, p > 0$ et X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre p, on a

$$\mathbb{P}\left[|X| \geq c\right] \leq \frac{\mathbb{E}\left[|X|^p\right]}{c^p}.$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Corollaire (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Soit $c > 0$ et X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2, alors

$$\mathbb{P}\left[|X - \mathbb{E}[X]| \geq c\right] \leq \frac{\mathbb{V}[X]}{c^2}.$$

Exemple : lancer de pièce : On des considères des v.a i.i.d X_i suivant une bernoulli de paramètre θ. On a pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left[\left|\overline{X}_n - \theta\right| \geq \epsilon\right] \leq \frac{\theta(1-\theta)}{\epsilon^2 n}.$$

INÉGALITÉS DE CAUCHY-SCHWARZ ET HÖLDER

Théorème (**Inégalité de Cauchy-Schwarz**)

Soit X, Y deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2. Alors

$$\mathbb{E}\left[|XY|\right] \leq \sqrt{\mathbb{E}\left[X^2\right]\mathbb{E}\left[Y^2\right]}.$$

Théorème (**Inégalité de Hölder**)

Soit X, Y deux variables aléatoires, et $p, q > 1$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si X admet un moment d'ordre p et si Y admet un moment d'ordre q, alors

$$\mathbb{E}\left[|XY|\right] \leq \left(\mathbb{E}\left[|X|^p\right]\right)^{\frac{1}{p}} \left(\mathbb{E}\left[|Y|^q\right]\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Exemples : Voir TD

III. Théorèmes asymptotiques

Loi faible des Grands Nombres

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, on note

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Théorème (Loi faible des Grands Nombres)

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées admettant une moyenne $m = \mathbb{E}[X_1]$, alors

$$\overline{X}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}} m.$$

Loi Forte des Grands Nombres

Théorème (Loi Forte des Grands Nombres)

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées admettant une moyenne $m = \mathbb{E}\left[X_1\right]$, alors

$$\overline{X}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s} m.$$

Exemple : On considère des v.a i.i.d X_i suivant une loi de Bernoulli de paramètre θ, alors

$$\overline{X}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s} \theta.$$

LANCER DE PIÈCE

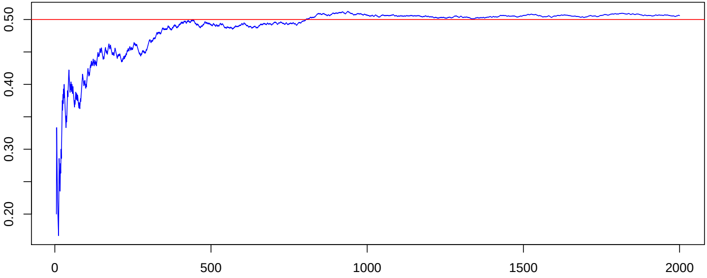

FIGURE – Evolution en fonction de n d'une réalisation de $\overline{X}_n$ avec $\theta = 0.5$

Théorème Central Limite

Théorème (Théorème Central Limite)

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de moyenne $m = \mathbb{E}[X_1]$ et de variance $\sigma^2 = \mathbb{V}[X_1]$, alors

$$\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - m\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$$

ce que l'on peut écrire comme

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\overline{X}_n - m\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Lancer de pièce équilibrée

Dans le cas du lancer de pièce, on a $\mathbb{E}\left[X_1\right] = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{V}\left[X_1\right] = \frac{1}{4}$, et donc

$$\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \frac{1}{2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{4}\right),$$

ce que l'on peut écrire comme

$$P_n := 2\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \frac{1}{2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

LANCER DE PIÈCE ÉQUILIBRÉE

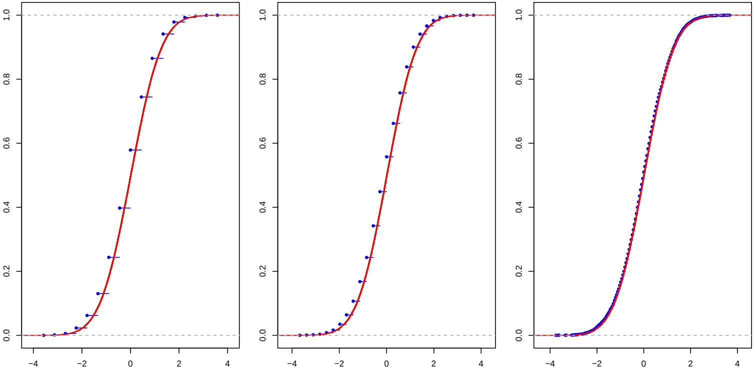

FIGURE – Fonctions de répartition de P_n (en bleu) et d'une loi normale centrée réduite (en rouge) pour $n = 20$ (à gauche) $n = 50$ (au centre) et $n = 2000$ (à droite).

IV. Opérations sur les limites

Opération sur les limites

Exemple : lancer de pièce On ne sait pas si la pièce est équilibrée. On a

$$\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \theta\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \theta\left(1-\theta\right)\right),$$

ce que l'on peut écrire comme

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\theta(1-\theta)}}\left(\overline{X}_n - \theta\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Théorème de continuité

Théorème (Théorème de continuité)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires et soit X une variable aléatoire. Soit g une fonction dont l'ensemble des points de discontinuité est noté D_g. Si $\mathbb{P}\left[X \in D_g\right] = 0$, alors la suite $g\left(X_n\right)$ hérite du mode de convergence de la suite (X_n), i.e

1. *Si (X_n) converge presque sûrement vers X, alors $g\left(X_n\right)$ converge presque sûrement vers $g\left(X\right)$.*
2. *Si (X_n) converge en probabilité vers X, alors $g\left(X_n\right)$ converge en probabilité vers $g\left(X\right)$.*
3. *Si (X_n) converge en loi vers X, alors $g\left(X_n\right)$ converge en loi vers $g\left(X\right)$.*

Théorème de continuité (remarque)

Remarque : Le théorème de continuité n'est généralement pas vrai pour la convergence en moyenne quadratique.

Contre-exemple : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}\left[X_n = 0\right] = 1 - \frac{1}{n^3} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}\left[X_n = n\right] = \frac{1}{n^3},$$

et la fonction $g : x \longmapsto x^2$.

Lancer de pièce

Si $\theta \in (0,1)$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{\overline{X}_n\left(1-\overline{X}_n\right)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} \frac{1}{\sqrt{\theta(1-\theta)}}.$$

et en particulier

$$\frac{\sqrt{\theta(1-\theta)}}{\sqrt{\overline{X}_n\left(1-\overline{X}_n\right)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} 1.$$

Théorème de Slutsky

Théorème (Théorème de Slutsly)

Soient (X_n) et (Y_n) des suites de variables aléatoires telles que (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire X et (Y_n) converge en probabilité vers une constante c, alors

$$X_n + Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X + c \qquad X_n Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} cX.$$

Exemple : lancer de pièce On a

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\overline{X}_n\left(1-\overline{X}_n\right)}}\left(\overline{X}_n-\theta\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Théorème de Slutsky (remarque)

Remarque : Le théorème de Slutsky est généralement faux si Y_n converge en loi vers une variable aléatoire.

Contre-exemple : Soient $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et (X_n), (Y_n) deux suite de variables aléatoires définie pour tout $n \geq 1$ par $X_n = -X$ et $Y_n = X$.

Théorème Central Limite et convergence en probabilité

Corollaire

Soit (v_n) une suite déterministe tendant vers $+\infty$, (X_n) une suite de variables aléatoires, X une variable aléatoire et a une une constante telles que

$$v_n\left(X_n - a\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X,$$

alors

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} a.$$

En particulier, si

$$\sqrt{n}\left(X_n - a\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X,$$

alors

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} a.$$

Delta Méthode

Théorème (Delta Méthode)

Soient (X_n) *une suite de variables aléatoires,* (v_n) *une suite de réels tendant vers* $+\infty$*,* X *une variable aléatoire et* a *une constante telles que*

$$\sqrt{v_n}\,(X_n - a) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X.$$

Soit g *une fonction dérivable en* a*, alors*

$$\sqrt{v_n}\,(g\,(X_n) - g(a)) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} g'(a)X.$$

En particulier, si il existe $\sigma^2 > 0$ *tel que*

$$\sqrt{v_n}\,(X_n - a) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right),$$

alors

$$\sqrt{v_n}\,(g\,(X_n) - g(a)) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \left(g'(a)\right)^2\sigma^2\right).$$

Lancer de pièce

Exemple : lancer de pièce Soit $\theta \in (0,1)$. Supposons que l'on s'intéresse à l'estimation de $\frac{1}{\theta}$. On a

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{\overline{X}_n} - \frac{1}{\theta}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1-\theta}{\theta^3}\right).$$