

Statistique inférentielle

Convergence de suites de variables aléatoires

A. Godichon-Baggioni

I. Rappels de probabilités

FONCTIONS DE RÉPARTITION

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire.

Définition (Fonction de répartition)

La **fonction de répartition** $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ associée à la variable aléatoire X est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x].$$

Cette fonction admet les propriétés suivantes :

- F_X est croissante ;
- F_X est continue à droite ;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.

EXEMPLES :

1. **Loi de Bernoulli** : si $X \sim \mathcal{B}(p)$ avec $p \in (0, 1)$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - p & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

2. **Loi uniforme** : si $X \sim \mathcal{U}([0, 1])$,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

3. **Loi normale** : si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

FONCTIONS DE RÉPARTITION

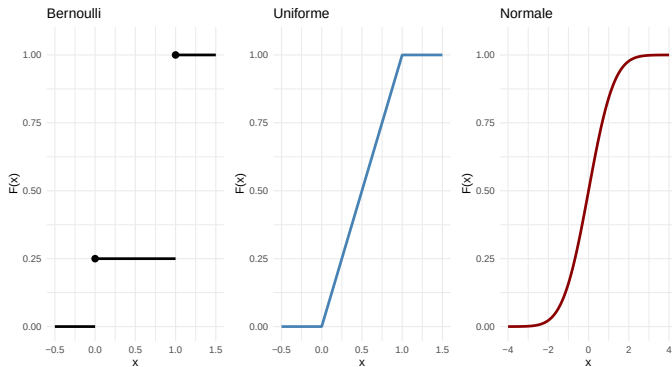


Figure – Fonctions de répartition d’une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0.75$ (à gauche), d’une loi uniforme (au centre) et d’une loi normale centrée réduite (à droite).

FONCTION CARACTÉRISTIQUE

Définition (Fonction caractéristique)

La **fonction caractéristique** d'une variable aléatoire X est l'application $\Phi_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$\Phi_X(t) = \mathbb{E} \left[e^{itX} \right].$$

Proposition

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Alors, la fonction caractéristique de leur somme est le produit des fonctions caractéristiques :

$$\Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t) \cdot \Phi_Y(t).$$

EXEMPLES

1. **Loi de Bernoulli** : si $X \sim \mathcal{B}(p)$ avec $p \in (0, 1)$, alors

$$\Phi_X(t) = pe^{it} + (1 - p).$$

2. **Loi uniforme** : si $X \sim \mathcal{U}([a, b])$, alors :

$$\Phi_X(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b - a)}.$$

3. **Loi normale** : si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors :

$$\Phi_X(t) = e^{i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}.$$

FONCTION GÉNÉRATRICE DES MOMENTS

Définition (Fonction génératrice des moments)

Soit X une variable aléatoire telle que la série

$$\sum_{k \geq 0} \frac{\mathbb{E}[X^k]}{k!} t^k$$

admette un rayon de convergence $R > 0$. La **fonction génératrice des moments** de X est définie sur l'intervalle $(-R, R)$ par :

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[X^k]}{k!} t^k.$$

Proposition

Si la fonction génératrice des moments existe, alors pour tout entier $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{E}[X^k] = M_X^{(k)}(0).$$

où $M_X^{(k)}(.)$ est la dérivée k -ème de la fonction $M_X(.)$.

EXEMPLES ET APPLICATION

Exemples :

1. **Loi de Bernoulli** : si $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors

$$M_X(t) = pe^t + (1 - p).$$

2. **Loi uniforme** : si $X \sim \mathcal{U}([a, b])$, alors :

$$M_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b - a)}.$$

3. **Loi normale** : si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors :

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}.$$

Application : Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Alors

$$\mathbb{E}[X] = \lambda \quad \mathbb{V}[X] = \lambda.$$

II. Modes de convergence

CONVERGENCES DE VARIABLES ALÉATOIRES

On considère une suite de variables aléatoires (X_n) et on s'intéresse à ses principaux modes de convergence, i.e

- ▶ Convergence en loi
- ▶ Convergence en probabilité
- ▶ Convergence presque sûre
- ▶ Convergence en moyenne quadratique

CONVERGENCE EN LOI

Définition (Convergence en loi)

On dit que la suite (X_n) **converge en loi** vers une variable aléatoire X si, pour toute fonction continue et bornée $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{E} [\varphi(X_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} [\varphi(X)] .$$

On note cette convergence :

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X .$$

Cette définition reste valable si l'on remplace "continue" par "uniformément continue".

EXEMPLES

Exemple 1 : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \geq 1$, $X_n \sim \mathcal{B}\left(p + \frac{1-p}{n}\right)$, alors

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X \sim \mathcal{B}(p).$$

Exemple 2 : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \geq 1$, $X_n = -X$, où $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, alors

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X.$$

Exemple 3 : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \geq 1$, $X_n \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 + \frac{1}{n}\right)$, alors

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$$

CONVERGENCE EN LOI

Proposition

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires. X_n converge en loi vers une variable aléatoire X si et seulement si en tout point de continuité x de la fonction de répartition F_X de X on a

$$F_{X_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} F_X(x).$$

EXEMPLES

Exemple 1 : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \geq 1$, $X_n \sim \mathcal{B}\left(p + \frac{1-p}{n}\right)$, alors

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X \sim \mathcal{B}(p).$$

Exemple 2 : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \geq 1$, $X_n = -X$, où $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, alors

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X.$$

Exemple 3 : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \geq 1$, $X_n \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 + \frac{1}{n}\right)$, alors

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$$

CONVERGENCE EN LOI

Corollaire

Soient (X_n) une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire telles que X_n, X sont absolument continues de densités f_n, f , alors X_n converge en loi vers X si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x).$$

Exemple 3 : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \geq 1$, $X_n \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 + \frac{1}{n}\right)$, alors

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$$

CONVERGENCE EN LOI

Proposition

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires, X_n converge en loi vers X si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_{X_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Phi_X(t).$$

Exemple : lancer de pièce. On rappelle que X_i vaut 1 si le i -ème lancer veut "Pile" et 0 sinon, et on a donc $X_i \sim \mathcal{B}(\theta)$. On considère

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$$

et on a

$$\bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \theta.$$

CONVERGENCE EN PROBABILITÉ

Définition

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires. On dit que (X_n) converge en probabilité vers X et on note

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} X$$

si pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}[|X_n - X| > \epsilon] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Exemple : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires, avec pour tout $n \geq 1$, $X_n \sim \mathcal{B}\left(\frac{p}{n}\right)$, où $p \in (0, 1)$, alors

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

CONVERGENCE EN LOI VS CONVERGENCE EN PROBABILITÉ

Proposition

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires. Si (X_n) converge en probabilité vers une variable aléatoire X , alors (X_n) converge en loi vers X .

Attention! La réciproque est généralement fausse!

Contre-exemple : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires, avec $X_n = -X$, où $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Proposition

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires. Si (X_n) converge en loi vers une constante c , alors (X_n) converge en probabilité vers c .

CONVERGENCE PRESQUE SÛRE

Définition

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires. On dit que (X_n) converge presque sûrement vers X et on note

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} X$$

si

$$\mathbb{P} \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = X \right] = \mathbb{P} \left[\left\{ \omega \in \Omega; \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = X(\omega) \right\} \right] = 1.$$

CONVERGENCE PRESQUE SÛRE VS CONVERGENCE EN PROBABILITÉ

Proposition

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires. Si (X_n) converge presque sûrement vers une variable aléatoire X , alors (X_n) converge en probabilité vers X .

Attention! La réciproque est généralement fausse!

Contre-exemple : Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$ et la suite d'événements (A_n) définie par $A_1 = \{X \in [0, 1]\}$, $A_2 = \{X \in [0, 1/2]\}$, $A_3 = \{X \in [1/2, 1]\}$, $A_4 = \{X \in [0, 1/4]\}$, ... Alors $Y_n = \mathbf{1}_{A_n}$ converge en probabilité vers 0 mais ne converge pas presque sûrement.

CONVERGENCE PRESQUE SÛRE VS CONVERGENCE EN PROBABILITÉ

Application du lemme de Borell-Cantelli : Si pour tout $\epsilon > 0$,

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}[|X_n - X| \geq \epsilon] < +\infty,$$

alors (X_n) converge presque sûrement vers X .

Exemple : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}[X_n = n] = \frac{1}{n^2}.$$

CONVERGENCE EN MOYENNE QUADRATIQUE

Définition

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires de carré intégrable. On dit que (X_n) converge en moyenne quadratique vers X et on note

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2} X$$

si

$$\mathbb{E} \left[|X_n - X|^2 \right] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Exemple : lancer de pièce. $\bar{X}_n$ converge en moyenne quadratique vers θ .

CONVERGENCE EN MOYENNE QUADRATIQUE VS CONVERGENCE EN PROBABILITÉ

Proposition

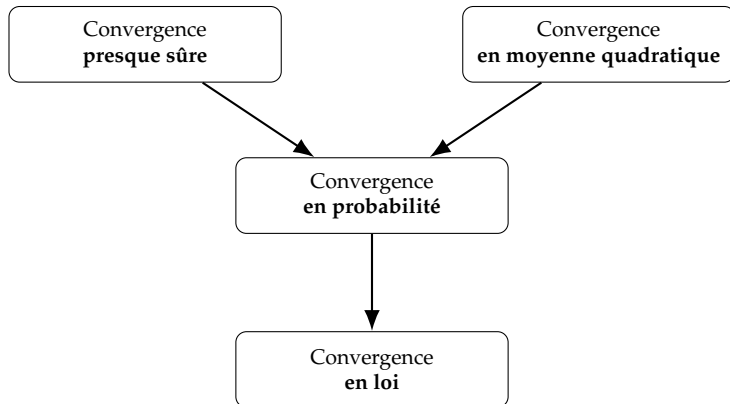
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires. Si (X_n) converge en moyenne quadratique vers une variable aléatoire X , alors (X_n) converge en probabilité vers X .

Attention! La réciproque est généralement fausse!

Contre-exemple : Soit (X_n) la suite de variables aléatoires définie pour tout $n \geq 1$ par

$$\mathbb{P}[X_n = 0] = \frac{n-1}{n}, \quad \mathbb{P}[X_n = n] = \frac{1}{n}.$$

RÉSUMÉ



PRESQUE SÛRE VS QUADRATIQUE ?

Attention! Il n'y a pas d'implication "générale" entre convergence presque sûre et convergence en moyenne quadratique.

Contre-exemple 1 : moyenne quadratique $\Rightarrow$ presque sûre. Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$ et la suite d'évènements (A_n) définie par $A_1 = \{X \in [0, 1]\}$, $A_2 = \{X \in [0, 1/2]\}$..., et on considère la suite $Y_n = \mathbf{1}_{A_n}$.

Contre-exemple 2 : presque sûre $\Rightarrow$ moyenne quadratique. On considère une suite de variables aléatoires (X_n) telle que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}[X_n = n] = \frac{1}{n^2}.$$

III. Inégalités classiques

INÉGALITÉ DE MARKOV ET DE BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV

Proposition (Inégalité de Markov)

Soient $c, p > 0$ et X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre p , on a

$$\mathbb{P}[|X| \geq c] \leq \frac{\mathbb{E}[|X|^p]}{c^p}.$$

Corollaire (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Soit $c > 0$ et X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2, alors

$$\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]| \geq c] \leq \frac{\mathbb{V}[X]}{c^2}.$$

Exemple : lancer de pièce. On a pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left[\left|\bar{X}_n - \theta\right| \geq \epsilon\right] \leq \frac{\theta(1-\theta)}{\epsilon^2 n}.$$

INÉGALITÉS DE CAUCHY-SCHWARZ

Théorème (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit X, Y deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2. Alors

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2] \mathbb{E}[Y^2]}.$$

Exemple : Soit $(X_n), (Y_n)$ deux suites d'estimateurs convergeant en moyenne quadratique vers 0. On suppose qu'ils convergent également à l'ordre 4, i.e ils admettent des moments d'ordre 4 et

$$\mathbb{E}[|X_n|^4] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[|Y_n|^4] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Alors $X_n Y_n$ converge en moyenne quadratique vers 0.

INÉGALITÉ DE HÖLDER

Théorème (Inégalité de Hölder)

Soit X, Y deux variables aléatoires, et $p, q > 1$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si X admet un moment d'ordre p et si Y admet un moment d'ordre q , alors

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq (\mathbb{E}[|X|^p])^{\frac{1}{p}} (\mathbb{E}[|Y|^q])^{\frac{1}{q}}.$$

Exemple 1 : Si X admet un moment d'ordre r , alors

$$\mathbb{E}[|X|] \leq (\mathbb{E}[|X|^r])^{\frac{1}{r}}.$$

Exemple 2 : Soit $(X_n), (Y_n)$ deux suites d'estimateurs où X_n converge à l'ordre r vers 0, avec $2 < r < 4$, et Y_n converge à l'ordre $\frac{2r}{r-2}$ vers 0.

IV. Théorèmes asymptotiques

LOIS DES GRANDS NOMBRES

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, on note

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Théorème (Loi faible des Grands Nombres)

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées admettant une moyenne $m = \mathbb{E}[X_1]$, alors

$$\bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} m.$$

Théorème (Loi Forte des Grands Nombres)

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d admettant une moyenne $m = \mathbb{E}[X_1]$, alors

$$\bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s} m.$$

Exemple : lancer de pièce. On a

$$\bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s} \theta.$$

LANCER DE PIÈCE

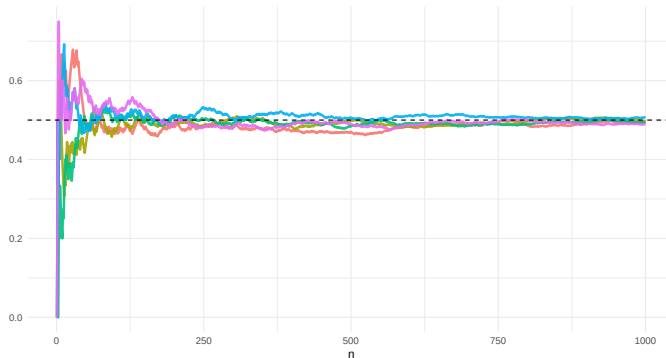


Figure – Evolution en fonction de n de 5 réalisations de $\bar{X}_n$ avec $\theta = 0.5$

THÉORÈME CENTRAL LIMITE

Théorème (Théorème Central Limite)

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de moyenne $m = \mathbb{E}[X_1]$ et de variance $\sigma^2 = \mathbb{V}[X_1]$, alors

$$\sqrt{n} \left(\bar{X}_n - m \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

ce que l'on peut écrire comme

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \left(\bar{X}_n - m \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

LANCER DE PIÈCE ÉQUILIBRÉE

Dans le cas du lancer de pièce, on a $\mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{V}[X_1] = \frac{1}{4}$, et donc

$$\sqrt{n} \left(\bar{X}_n - \frac{1}{2} \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, \frac{1}{4} \right),$$

ce que l'on peut écrire comme

$$P_n := 2\sqrt{n} \left(\bar{X}_n - \frac{1}{2} \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

LANCER DE PIÈCE ÉQUILIBRÉE

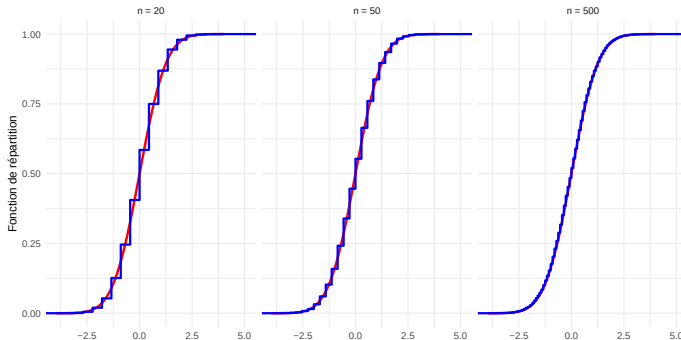


Figure – Fonctions de répartition de P_n (en bleu) et d'une loi normale centrée réduite (en rouge) pour $n = 20$ (à gauche) $n = 50$ (au centre) et $n = 500$ (à droite).

V. Opérations sur les limites

OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

Mode de convergence	Transformation affine	Somme	Produit
	$aX_n + b$	$X_n + Y_n$	$X_n Y_n$
Convergence presque sûre	✓	✓	✓
Convergence en moyenne quadratique	✓	✓	✗
Convergence en probabilité	✓	✓	✓
Convergence en loi	✓	✗	✗

Table – Opérations élémentaires sur les limites

Contre-exemple : Soit $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $(X_n), (Y_n)$ deux suites de variables aléatoires telles que pour tout $n \geq 1$, $X_n = -X$ et $Y_n = X$.

Contre-exemple : Soit $Y_n = X_n$ tels que

$$\mathbb{P}[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n^3}, \quad \mathbb{P}[X_n = n] = \frac{1}{n^3}.$$

OPÉRATION SUR LES LIMITES

Exemple : lancer de pièce. On ne sait pas si la pièce est équilibrée. On a

$$\sqrt{n} \left(\bar{X}_n - \theta \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \theta(1 - \theta)),$$

ce que l'on peut écrire comme

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\theta(1 - \theta)}} \left(\bar{X}_n - \theta \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Question : Peut-on en déduire

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}} \left(\bar{X}_n - \theta \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)?$$

THÉORÈME DE CONTINUITÉ

Théorème (Théorème de continuité)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires et c une constante. Soit g une fonction continue en c , alors la suite $g(X_n)$ hérite du mode de convergence de la suite (X_n) , i.e

1. Si $X_n \xrightarrow{p.s.} c$, alors $g(X_n) \xrightarrow{p.s.} g(c)$;
2. Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$, alors $g(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} g(c)$;
3. Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c$, alors $g(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} g(c)$.

Remarque : Le théorème de continuité n'est généralement pas vrai pour la convergence en moyenne quadratique.

Contre-exemple : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n^3} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}[X_n = n] = \frac{1}{n^3}.$$

LANCER DE PIÈCE

Exemple : lancer de pièce. Si $\theta \in (0, 1)$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{\bar{X}_n (1 - \bar{X}_n)}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} \frac{1}{\sqrt{\theta(1 - \theta)}}.$$

et en particulier

$$\frac{\sqrt{\theta(1 - \theta)}}{\sqrt{\bar{X}_n (1 - \bar{X}_n)}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} 1.$$

THÉORÈME DE SLUTSKY

Théorème (Théorème de Slutsky)

Soient (X_n) et (Y_n) des suites de variables aléatoires telles que (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire X et (Y_n) converge en probabilité vers une constante c , alors

$$X_n + Y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X + c$$

$$X_n Y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} cX.$$

Exemple : lancer de pièce On a

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\bar{X}_n (1 - \bar{X}_n)}} (\bar{X}_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

THÉORÈME DE SLUTSKY (REMARQUES ET COROLLAIRE)

Remarque : Le théorème de Slutsky est généralement faux si Y_n converge en loi vers une variable aléatoire.

Contre-exemple : Soient $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $(X_n), (Y_n)$ deux suite de variables aléatoires définie pour tout $n \geq 1$ par $X_n = -X$ et $Y_n = X$.

Corollaire

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires, a et σ^2 des constantes telles que

$$\sqrt{n} (X_n - a) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$

alors (X_n) converge en probabilité vers a .

DELTA MÉTHODE

Théorème (Delta méthode)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires, a, σ^2 des constantes telles que

$$\sqrt{n} (X_n - a) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N} (0, \sigma^2),$$

alors

$$\sqrt{n} (g(X_n) - g(a)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N} (0, (g'(a))^2 \sigma^2).$$

Exemple : lancer de pièce Soit $\theta \in (0, 1)$. Supposons que l'on s'intéresse à l'estimation de $\frac{1}{\theta}$. On a

$$\sqrt{n} \left(\frac{1}{\bar{X}_n} - \frac{1}{\theta} \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, \frac{1 - \theta}{\theta^3} \right).$$