Analyse Numérique

Méthodes itératives

A. Godichon-Baggioni

I. Introduction et résultats généraux

PROBLÉMATIQUE

Objectif : résoudre

$$Ax = b$$

Limites de la décomposition LU :

- $O(n^3)$ opérations
- Nécessite de stocker P, L et U
- Pas adaptée à la grande dimension

Méthodes itératives :

- Approcher la solution
- Réduire le temps de calcul

Méthodes itérative de Type I

Méthode itérative de type I : partant de $x_0 \in \mathbb{K}^n$, pour tout $k \geq 0$,

$$x_{k+1} = Bx_k + c \tag{1}$$

avec

- $B \in M_n(\mathbb{K})$.
- $c \in \mathbb{K}^n$.

Définition

La méthode itérative est dite :

- *consistante si l'équation $x = Bx + c$ a une unique solution égale à $A^{-1}b$.*
- *convergente si pour tout $x_0 \in \mathbb{K}$, la suite (x_k) converge.*

Convergence et limite

Proposition

La méthode est consistante si $c = (I_n - B)A^{-1}b$. Si elle est consistante et convergente, toute suite $(x_k)_{k \geq 0}$ définie par (1) *converge vers $A^{-1}b$.*

Limites de la méthode :

- Elle converge que pour $c = (I_n - B)A^{-1}b$.
- On ne veut pas calculer A^{-1}.

Méthodes itérative de Type II

Méthode itérative de type II : partant de $x_0 \in \mathbb{K}^n$, pour tout $k \geq 0$,

$$Mx_{k+1} = Nx_k + b, \tag{2}$$

avec

- $M \in M_n(\mathbb{K})$
- $N \in M_n(\mathbb{K})$

Réécriture :

$$x_{k+1} = M^{-1}Nx_k + M^{-1}b. \tag{3}$$

Proposition

La méthode itérative (2) *est consistante si* $N = M - A$.

II. Méthode de Jacobi et de Gauss-Seidel

DÉCOMPOSITION DE A

Les deux méthodes reposent sur la décomposition suivante :

$$A = D - E - F$$

avec

- D diagonale
- E triangulaire inférieure
- F triangulaire supérieure

vérifiant

$$D = \left(a_{ii}\delta_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq n},\ E = \left(-a_{ij}\delta_{i>j}\right)_{1\leq i,j\leq n} \text{ et } F = \left(-a_{ij}\delta_{i<j}\right)_{1\leq i,j\leq n}.$$

EXEMPLE

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1/2 & 2 & -3 \end{pmatrix},$$

on a

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Attention ! Les méthodes de Jacobi et Gauss Seidel ne marchent que si $a_{ii} = d_{ii} \neq 0$ pour tout i.

Méthode de Jacobi

Méthode de Jacobi :

- $M = D$
- $N = E + F$

Matrice d'itération :

$$M^{-1}N = D^{-1}(E + F)$$

Consistance :

$$M - N = D - (E + F) = A.$$

Méthode de Gauss Seidel

Méthode de Gauss Seidel :

- $M = D - E$
- $N = F$

Matrice d'itération :

$$M^{-1}N = (D-E)^{-1}F = I_n - (D-E)^{-1}A$$

Consistance :

$$M - N = D - E - F = A.$$

Problème : Calcul de $M^{-1}N$? Résoudre $Mx_{k+1} = Nx_k + b$.

III. Convergence des méthodes itératives

Convergence des méthodes de type I

Soit

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{K}^n \\ x_{k+1} = Bx_k + c, \quad k \geq 0 \end{cases}$$

où $B \in M_n(\mathbb{K})$ et $c \in \mathbb{K}^n$.

Proposition

Soit $(x_k)_{k\geq 1}$ une suite itérative définie par (1)*. Alors pour tout $k \geq 1$,*

$$x_k = B^k x_0 + \left(\sum_{i=0}^{k-1} B^i \right) c.$$

CONVERGENCE DES MÉTHODES DE TYPE I

Proposition

Soit $\|\cdot\|$ une norme multiplicative[1] *sur $M_n(\mathbb{K})$ et $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $\|B\| < 1$. Alors $\sum_{k\geq 0} B^k$ est bien définie et*

1. $\|\sum_{k\geq 0} B^k\| \leq \frac{1}{1-\|B\|}$,
2. $\sum_{k\geq 0} B^k = (I_n - B)^{-1}$.

Corollaire

Une méthode de type I définie par $B \in M_n(\mathbb{K}), c \in \mathbb{K}^n$ est convergente si il existe une norme opérateur $\|\cdot\|$ sur $M_n(\mathbb{K})$ qui vérifie $\|B\| < 1$.

1. $\|.\|$ est dite multiplicative si $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

RAYON SPECTRAL

Problème :

- Résultat précédent dépend de la norme choisie.
- Condition nécessaire et suffisante ?

Définition

Le rayon spectral $\rho(A)$ d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est définie comme

$$\rho(A) = \max\{|\lambda|,\ \textit{valeur propre complexe de } A\}.$$

RAYON SPECTRAL

Proposition

1. *Si* $A = A^*$*, nous avons en particulier* $\rho(A) = \|A\|_2$.
2. *Soit* $\|\cdot\|$ *une norme sur* $\mathbb{K}^n$ *et* $\|\cdot\|$ *sa norme associée sur* $M_n(\mathbb{K})$*. Alors*
$$\rho(A) \leq \|A\|.$$
3. *[Admis]*
$$\rho(A) = \inf(\|A\|,\ \|\cdot\| \textit{ norme opérateur sur } M_n(\mathbb{K})\}).$$

Convergence des méthodes

Proposition

Une méthode consistante est convergente si et seulement si

$$\rho(B) = \sup\{|\lambda|, \text{ valeur propre complexe de } B\} < 1.$$

Corollaire

On a les conditions de convergence suivante pour la méthode de type II (2) *:*

- ***Condition nécéssaire :*** *La méthode de type II est convergente si* $\|M^{-1}N\| < 1$ *pour une certaine norme opérateur* $\|\cdot\|$.
- ***Condition nécéssaire et suffisante :*** *La méthode de type II est convergente si et seulement si*

$$\rho(M^{-1}N) < 1.$$

IV. Critères d'arrêt

Critères d'arrêt

Objectif : Arrêter l'algorithme quand $\|x_k - \overline{x}\| \leq \epsilon$ pour $\epsilon > 0$ fixé.

Problème : On ne connait pas $\overline{x}$.

Deux critères d'arrêt :

1. $\|Ax_k - b\| \leq \epsilon$.
   - **Inconvénient :** Sensible au conditionnement de A.
2. $\|x_k - x_k\| \leq \epsilon$.
   - **Inconvénient :** Sensible au choix de B.

Critères d'arrêt

Proposition

Supposons la méthode consistante et soit $\bar{x}$ tel que $A\bar{x} = b$. Pour toute norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{K}^n$, en notant également $\|\cdot\|$ pour la norme associée sur $M_n(\mathbb{K})$,

1. *Si $\|Ax_k - b\| \leq \epsilon$, alors*

$$\|x_k - \bar{x}\| \leq \|A^{-1}\|\epsilon, \qquad \textit{et} \qquad \frac{\|x_k - \bar{x}\|}{\|\bar{x}\|} \leq Cond(A)\frac{\epsilon}{\|b\|}.$$

2. *Si $\|x_k - x_{k-1}\| \leq \epsilon$, alors*

$$\|x_{k-1} - \bar{x}\| \leq \|(I_n - B)^{-1}\|\epsilon, \qquad \textit{et} \qquad \frac{\|x_{k-1} - \bar{x}\|}{\|\bar{x}\|} \leq Cond(I_n - B)\frac{\epsilon}{\|c\|}.$$

Remarque

Attention !

$$\|x_{k+1} - x_k\| \xrightarrow{k\to\infty} 0 \not\Longrightarrow (x_k)_{k\geq 0} \text{ converge}$$

Contre-exemple :

$$x_k = x_{k-1} + \frac{1}{k}$$

Dans le cas spécifique des méthodes itératives de ce cours, ce phénomène ne se passe pas pour nos méthodes convergentes car $\rho(B) < 1$ (cf le point 2. de la proposition précédente).