Analyse Numérique

Méthode de la puissance itérée

A. Godichon-Baggioni

I. Méthode de la puissance

Problématique

Objectif : Trouver la plus petite et la plus grande valeur propre de A.

Limites du polynôme caractéristique :

- Calcul du déterminant
- Trouver les racines du polynôme
- Instable et coûteux

Quelques rappels

A a pour **valeur propre** $\lambda \in \mathbb{K}$ si il existe un vecteur non nul x tel que

$$Ax = \lambda x.$$

Le vecteur x est alors appelé **vecteur propre** pour A associé à la valeur propre λ. Pour toute valeur propre λ et vecteur propre associé x, on a

$$\frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|_2^2} = \lambda.$$

Une matrice A est **diagonalisable** si il existe une base B de $\mathbb{K}^n$ qui consiste en des vecteurs propres de A.

Algorithme de la puissance

Algorithme de la puissance :

1. on fixe $x_0 \in \mathbb{K}^n$ (attention ! contrairement aux méthodes précédentes, ce choix ne doit pas être complètement quelconque).
2. pour $k \geq 0$, on pose
$$x_{k+1} = \frac{Ax_k}{\|Ax_k\|_2}.$$
3. Après arrêt de l'algorithme, on pose
$$\theta_k = \langle Ax_k, x_k \rangle.$$

Convergence

Pour Nous désignons également $\{v_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une base de $\mathbb{K}^n$ telle que v_i est un vecteur propre unitaire de A pour λ_i pour tout $1 \leq i \leq n$.

Convergence

$A \in M_n(\mathbb{K})$ diagonalisable, on note $\{\lambda_i\}_{1 \leq i \leq n}$ les valeurs propres de A ordonnées par module décroissant :

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|.$$

Proposition

Supposons que A soit diagonalisable et que $|\lambda_1| > |\lambda_2|$. Si $x_0 \notin Vect(v_i, i \geq 2)$, alors

- *θ_k converge vers λ_1.*
- *$\left(\left(\frac{\overline{\lambda_1}}{|\lambda_1|}\right)^k x_k\right)_{k \geq 1}$ converge vers un vecteur propre unitaire de A associé à λ_1.*

Preuve

1. Montrer que pour tout $k \geq 1$,

$$x_k = \frac{A^k x_0}{\left\|A^k x_0\right\|_2}.$$

2. Ecrire $\frac{1}{|\lambda_1|^k} A^k x_0$ dans la base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ composé des vecteurs propres de A associés respectivement à $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
3. En déduire la limite de $\frac{1}{|\lambda_1|^k} \left\|A^k x_0\right\|$.
4. En déduire la limite de

$$\left(\frac{\overline{\lambda}_1}{|\lambda_1|}\right)^k x_k.$$

5. En déduire la convergence de θ_k.

II. Méthode de la puissance inverse

Objectif

Objectif : Approcher la plus petite valeur propre (en terme de module) de A (notée λ_n) :

- Idée : $\lambda_n = \lambda_{\max}\left(A^{-1}\right)$ où $\lambda_{\max}$ est la plus grande valeur propre (en terme de module).
- Approximation : méthode de la puissance appliquée à A^{-1}.
- Problème : A^{-1} inconnue.

Algorithme de la puissance inverse

Algorithme de la puissance inverse :

1. on fixe $x_0 \in \mathbb{K}^n$.
2. pour $k \geq 0$, on pose

$$x_{k+1} = \frac{A^{-1}x_k}{\|A^{-1}x_k\|_2}.$$

3. Après arrêt de l'algorithme, on pose

$$\theta_k = \langle A^{-1}x_k, x_k \rangle^{-1}.$$

Attention ! On ne connait pas A^{-1}.

Méthode de la puissance inverse

1. On fixe $x_0 \in \mathbb{K}^n$.
2. Pour $k \geq 0$, on résout
$$A\tilde{x}_{k+1} = x_k,$$
puis on pose
$$x_{k+1} = \frac{\tilde{x}_{k+1}}{\|\tilde{x}_{k+1}\|}.$$
3. Après arrêt de l'algorithme, on pose
$$\bar{\theta}_k = \langle Ax_k, x_k \rangle.$$

Convergence

Montrer que si $x_0 \notin \text{Vect}\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ et si $0 < |\lambda_n| < |\lambda_{n-1}|$, alors $\left(\frac{\overline{\lambda}_n}{|\lambda_n|}\right)^{-k} (x_k)_{k \geq 1}$ converge vers un vecteur propre v_n associé à la plus petite valeur propre λ_n de A, et $\overline{\theta}_k$ converge vers λ_n.