Statistique inférentielle

Vecteurs Gaussiens, Théorème de Cochran et applications

A. Godichon-Baggioni

Théorème Central Limite multivarié

Théorème (Théorème Central Limite multivarié)

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, indépendants et identiquement distribués. On suppose $\mathbb{E}\left[\|X_1\|^2\right] < +\infty$ et on note $m = \mathbb{E}[X_1]$ son vecteur moyen et $\Gamma = Var[X_1]$ sa matrice de variance-covariance. On note $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ et on a alors la convergence en loi

$$\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - m\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Gamma).$$

OBJECTIFS

L'étude des vecteurs gaussiens permet non seulement d'étudier le comportement asymptotique d'estimateurs pour des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ mais aussi (via le Théorème de Cochran) :

- L'étude non asymptotique des estimteurs de la moyenne et de la variance d'une variable aléatoire suivant une loi normale (cf chapitre précédent).
- Estimation des paramètres dans le cadre du modèle linéaire gaussien (cf TD)
- Construction de tests dans le cadre gaussien (cf chapitre suivant).

I. Vecteurs aléatoires

Vecteurs aléatoires

Soit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \dots \\ X_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$ un vecteurs aléatoire tel que $\mathbb{E}\left[X_j^2\right] < +\infty$. Pour tout i, j, la covariance entre X_i et X_j est définie par

$$\operatorname{Cov}\left(X_i, X_j\right) = \mathbb{E}\left[\left(X_i - \mathbb{E}\left[X_i\right]\right)\left(X_j - \mathbb{E}\left[X_j\right]\right)\right]$$

Remarque : Si X_i et X_j sont indépendantes, $\operatorname{Cov}\left(X_i, X_j\right) = 0$ mais la réciproque est généralement fausse (sauf pour les vecteurs gaussiens).

Espérance et matrice de Covariance

Définition

Soit X un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$ tel que pour tout $i = 1, ..., d$, $\mathbb{E}\left[X_i^2\right] < +\infty$. Le vecteur moyen de X est défini par

$$\mathbb{E}[X] = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[X_1] \\ \vdots \\ \mathbb{E}[X_d] \end{pmatrix}$$

et sa matrice de covariance est définie par

$$\begin{aligned} Var[X] &= \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])(X - \mathbb{E}[X])^T\right] \\ &= \begin{pmatrix} Var[X_1] & Cov(X_1, X_2) & \dots & Cov(X_1, X_d) \\ Cov(X_2, X_1) & Var[X_2] & \dots & Cov(X_2, X_d) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(X_d, X_1) & Cov(X_d, X_2) & \dots & Var[X_d] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Matrice de covariance

Théorème

La matrice de covariance est une matrice symétrique semi-définie positive.

Théorème

Soit X un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$ de moyenne m et de matrice de covariance C. Alors, si A est une matrice réelle $p \times d$, le vecteur aléatoire $AX \in \mathbb{R}^p$ a pour vecteur moyen Am et pour matrice de covariance ACA^T.

Fonction caractéristique

Définition

Soit X un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$. Sa fonction caractéristique Φ_X est définie pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ par

$$\Phi_X(u) = \mathbb{E}\left[e^{iu^T X}\right] = \mathbb{E}\left[e^{i(u_1 X_1 + \ldots + u_d X_d)}\right].$$

II. Vecteurs aléatoires Gaussiens

Vecteurs aléatoires gaussiens

Définition

Soit X un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$. X est un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^d$ si et seulement si toute combinaison linéaire de ses composantes est une variable aléatoire réelle gaussienne, i.e

$$\forall u \in \mathbb{R}^d, \quad u^T X \sim \mathcal{N}\left(m_u, \sigma_u^2\right).$$

Exemple : Un vecteur X dont les composantes X_i sont indépendantes et suivent une loi normale est un vecteur gaussien.

VECTEUR GAUSSIEN ET FONCTION CARACTÉRISTIQUE

Théorème

Soit X un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *Le vecteur X est un vecteur gaussien de moyenne m et de matrice de covariance Γ.*
2. *La fonction caractéristique de X est donnée pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ par*

$$\Phi_X(u) = \mathbb{E}\left[e^{iu^T X}\right] = \exp\left(iu^T m - \frac{1}{2}u^t \Gamma u\right).$$

Corollaires

Corollaire

Soit $X \sim \mathcal{N}(m, \Gamma)$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$. *Soit* A *une matrice* $p \times d$ *et* $b \in \mathbb{R}^p$, *alors*

$$AX + b \sim \mathcal{N}\left(Am + b, A\Gamma A^T\right)$$

Corollaire

Soit $X \sim \mathcal{N}(m, \Gamma)$, *et* Γ *inversible, alors*

$$\Gamma^{-1/2}(X - m) \sim \mathcal{N}(0, I_d).$$

Exemple

Exemple : Soit $X = (X_1, X_2)^T \in \mathbb{R}^2$ un vecteur Gaussien avec $X \sim \mathcal{N}(0, V)$. Alors la variabe aléatoire $Z = X_1 + X_2$ suit une loi normale. Plus précisément,

$$Z \sim \mathcal{N}\left(0, u^T V u\right)$$

avec $u = (1, 1)^T$.

Densité d'un vecteur gaussien

Théorème

Soit $X \in \mathbb{R}^d$ avec $X \sim \mathcal{N}(m, \Gamma)$. X admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^d$ si et seulement si Γ est inversible. Dans ce cas, la densité de f est donnée pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \, |det(\Gamma)|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-m)^T \Gamma^{-1} (x-m)\right)$$

Vecteur gaussien et indépendance

Théorème

Pour tout vecteur gaussien X de $\mathbb{R}^d$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- *Les composantes $X_1, \ldots, X_d$ de X sont indépendantes.*
- *La matrice de covariance Γ de X est diagonale.*

Corollaire

Soit X un vecteur gaussien, alors pour tout $i \neq j$, X_i et X_j sont indépendantes si et seulement si

$$Cov(X_i, X_j) = 0.$$

Remarque

Attention ! Le corollaire précédent n'est automatiquement vrai que pour les vecteurs gaussiens !

Contre-exemple : Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et Y une variable aléatoire suivant une loi de Rademacher de paramètre $p = 1/2$, i.e

$$\mathbb{P}[Y = 1] = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}[Y = -1] = \frac{1}{2}.$$

On considère la variable aléatoire $Z = XY$. On a

1. $\mathrm{Cov}(X, Z) = 0$ mais X et Z ne sont pas indépendants.
2. Les composantes du vecteur $U = (X, Z)$ suivent des lois normales mais U n'est pas un vecteur gaussien.

III. Théorème de Cochran et applications

Théorème de Cochran

Théorème (Théorème de Cochran)

Soit X un vecteur aléaoire de $\mathbb{R}^n$ suivant une loi $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2 I_n\right)$ avec $\sigma^2 > 0$. Soit $\mathbb{R}^n = E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_p$ une décomposition de $\mathbb{R}^n$ en somme directe de p sous-espaces vectoriels orthogonaux de dimensions respectives $d_1, \ldots, d_p$. Soit P_k le projecteur orthogonal sur E_k et $Y_k = P_k X$ la projection orthogonale de X sur E_k.

1. *Les projections $Y_1, \ldots, Y_p$ sont des vecteurs gaussiens indépendants et $Y_k \sim \mathcal{N}\left(P_k m, \sigma^2 P_k\right)$.*
2. *Les variables aléatoires $\|Y_1 - P_1 m\|^2, \ldots, \|Y_p - P_p m\|^2$ sont indépendantes et*

$$\frac{\|Y_k - P_k m\|^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{d_k}$$

COROLLAIRE

Corollaire

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec $X_1 \sim \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$. On a alors

1. $\frac{n-1}{\sigma^2} S_n^2 \sim \chi^2_{n-1}$.
2. $\overline{X}_n$ *et* S_n^2 *sont indépendantes.*

AUTRES RÉSULTATS

Proposition

Soient Z, Z_p, Z_q trois variables aléatoires telles que

1. $Z = Z_p + Z_q$
2. $Z_p \sim \chi_p^2$ *et* $Z_q \sim \chi_q^2$
3. Z_p *et* Z_q *sont indépendantes*

alors $Z \sim \chi_{p+q}$.