Mise à niveau

Vecteurs aléatoires, Vecteurs Gaussiens, Théorème de Cochran et applications

A. Godichon-Baggioni

I. Vecteurs aléatoires

Vecteurs aléatoires

Définition

- *Un vecteur aléatoire* $X = (X_1, \ldots, X_d) \in \mathbb{R}^d$ *est un vecteur dont toutes les composantes sont des variables aléatoires réelles.*
- *La fonction de répartition* F_X *de* X *est définie pour tout* $t = (t_1, \ldots, t_d)$ *par*

$$F_X(t_1, \ldots, t_d) = \mathbb{P}[X_1 \leq t_1, \ldots, X_d \leq t_d].$$

- *Dans le cas où* X *est continue, i.e où* X *admet une densité* f_X *par rapport à la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}^d$*, on a*

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t_1} \ldots \int_{-\infty}^{t_d} f_X(u_1, \ldots, u_d)\, du_1, \ldots, du_d$$

avec pour presque tout t

$$f_X(t) = \frac{\partial}{\partial t_1, \ldots, \partial t_d} F_X(t).$$

Densité et propriétés

Proposition

- *Toute densité de probabilité f_X vérifie pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, $f_X(t) \geq 0$ et*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_X\left(t_1, \dots, t_d\right) dt_1, \dots, dt_d = 1.$$

- *Soit $\tilde{X} = (X_1, \dots, X_k)^T$ avec $k \leq d$, la densité marginale de $\tilde{X}$ est définie pour tout $\tilde{t} = (t_1, \dots, t_k)$ par*

$$f_{\tilde{X}}\left(\tilde{t}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots, \int_{-\infty}^{+\infty} f_X\left(t_1, \dots, t_k, u_{k+1}, \dots, u_d\right) du_{k+1} \dots, du_d.$$

Remarque : La connaissance des lois marginales de toutes les composantes de X ne suffit par à déterminer sa loi.

Vecteurs aléatoires

Soit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \dots \\ X_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$ un vecteurs aléatoire tel que $\mathbb{E}\left[X_j^2\right] < +\infty$. Pour tout i, j, la covariance entre X_i et X_j est définie par

$$\text{Cov}\left(X_i, X_j\right) = \mathbb{E}\left[\left(X_i - \mathbb{E}\left[X_i\right]\right)\left(X_j - \mathbb{E}\left[X_j\right]\right)\right]$$

Remarque : Si X_i et X_j sont indépendantes, $\text{Cov}\left(X_i, X_j\right) = 0$ mais la réciproque est généralement fausse (sauf pour les vecteurs gaussiens).

Espérance et matrice de Covariance

Définition

Soit X un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$ tel que pour tout $i, \ldots, d$, $\mathbb{E}\left[X_i^2\right] < +\infty$. Le vecteur moyenne de X est défini par

$$\mathbb{E}[X] = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[X_1] \\ \vdots \\ \mathbb{E}[X_d] \end{pmatrix}$$

et sa matrice de covariance est définie par

$$\begin{aligned} Var[X] &= \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])(X - \mathbb{E}[X])^T\right] \\ &= \begin{pmatrix} Var[X_1] & Cov(X_1, X_2) & \ldots & Cov(X_1, X_d) \\ Cov(X_2, X_1) & Var[X_2] & \ldots & Cov(X_2, X_d) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(X_d, X_1) & Cov(X_d, X_2) & \ldots & Var[X_d] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Matrice de covariance

Théorème

La matrice de covariance est une matrice symétrique semi-définie positive.

Théorème

Soit X un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$ de moyenne m et de matrice de covariance C. Alors, si A est une matrice réelle $p \times d$, le vecteur aléatoire $AX \in \mathbb{R}^p$ a pour vecteur moyen Am et pour matrice de covariance ACA^T.

Fonction caractéristique

Définition

Soit X un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$. Sa fonction caractéristique Φ_X est définie pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ par

$$\Phi_X(u) = \mathbb{E}\left[e^{iu^T X}\right] = \mathbb{E}\left[e^{i(u_1 X_1 + \ldots + u_d X_d)}\right].$$

Indépendance

Définition

Soient $X \in \mathbb{R}^d, Y \in \mathbb{R}^{d'}$ deux vecteurs aléatoires. X et Y sont indépendants si pour tout $A \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$ et pour tout $B \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{d'}\right)$

$$\mathbb{P}\left[(X, Y) \in A \times B\right] = \mathbb{P}\left[X \in A\right] \mathbb{P}\left[Y \in B\right].$$

Caractérisation

Proposition

Soient $X \in \mathbb{R}^d, Y \in \mathbb{R}^{d'}$ deux vecteurs aléatoires.

- *X et Y sont indépendants si et seulement si pour tout $t = (t_1, t_2)$,*
$$\Phi_{(X,Y)}(t) = \Phi_X(t_1)\,\Phi_Y(t_2)\,.$$
- *X et Y sont indépendants si et seulement si pour tout $t = (t_1, t_2)$,*
$$f_{(X,Y)}(t) = f_X(t_1)\,f_Y(t_2)\,.$$

II. Vecteurs aléatoires Gaussiens

Vecteurs aléatoires gaussiens

Définition

Soit X un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$. X est un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^d$ si et seulement si toute combinaison linéaire de ses composantes est une variable aléatoire réelle gaussienne, i.e

$$\forall u \in \mathbb{R}^d, \quad u^T X \sim \mathcal{N}\left(m_u, \sigma_u^2\right).$$

Exemple : Un vecteur X dont les composantes X_i sont indépendantes et suivent une loi normale est un vecteur gaussien.

Vecteur gaussien et fonction caractéristique

Théorème

Soit X un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *Le vecteur X est un vecteur gaussien de moyenne m et de matrice de covariance Γ.*
2. *La fonction caractéristique de X est donnée pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ par*

$$\Phi_X(u) = \mathbb{E}\left[e^{iu^T X}\right] = \exp\left(iu^T m - \frac{1}{2}u^t \Gamma u\right).$$

COROLLAIRES

Corollaire

Soit $X \sim \mathcal{N}(m, \Gamma)$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$. *Soit* A *une matrice* $p \times d$ *et* $b \in \mathbb{R}^p$, *alors*

$$AX + b \sim \mathcal{N}\left(Am + b, A\Gamma A^T\right)$$

Corollaire

Soit $X \sim \mathcal{N}(m, \Gamma)$, *et* Γ *inversible, alors*

$$\Gamma^{-1/2}(X - m) \sim \mathcal{N}(0, I_d).$$

Densité d'un vecteur gaussien

Théorème

Soit $X \in \mathbb{R}^d$ avec $X \sim \mathcal{N}(m, \Gamma)$. X admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^d$ si et seulement si Γ est inversible. Dans ce cas, la densité de f est donnée pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \left|det(\Gamma)\right|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-m)^T \Gamma^{-1}(x-m)\right)$$

Vecteur gaussien et indépendance

Théorème

Pour tout vecteur gaussien X de $\mathbb{R}^d$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- *Les composantes $X_1, \ldots, X_d$ de X sont indépendantes.*
- *La matrice de covariance Γ de X est diagonale.*

Corollaire

Soit X un vecteur gaussien, alors pour tout $i \neq j$, X_i et X_j sont indépendantes si et seulement si

$$Cov(X_i, X_j) = 0.$$

III. Convergences

Convergence en loi

Définition

Soit (X_n) une suite de vecteurs aléatoires. On dit que (X_n) converge en loi vers le vecteur aléatoire X si pour tout point de continuité t de F_X on a

$$F_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F_X(t).$$

Proposition

(X_n) converge en loi vers le vecteur aléatoire X si et seulement si pour toute fonction continue bornée h,

$$\mathbb{E}\left[h\left(X_n\right)\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}\left[h(X)\right].$$

Convergence en probabilité

Soit (X_n) une suite de vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ que l'on munit d'une norme $\|.\|$.

Définition

La suite (X_n) converge en probabilité vers un vecteur aléatoire X si pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left[\|X_n - X\| > \epsilon\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Remarque : Comme toutes les normes sont équivalentes dans $\mathbb{R}^d$, alors si la suite (X_n) converge pour une norme $\|.\|$, alors elle converge aussi pour une norme $\|.\|'$.

Définition

La suite (X_n) converge presque sûrement vers un vecteur aléatoire X si

$$\mathbb{P}\left[\left\{\omega, \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Remarque : Si pour tout $\epsilon > 0$,

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left[\|X_n - X\| > \epsilon\right] < +\infty$$

alors (X_n) converge presque sûrement vers X.

Lien entre les modes de convergence

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} X \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$$

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2} X \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$$

IV. Théorèmes asymptotiques

Théorème de continuité

Théorème (Théorème de continuité)

Soit $g : D \longrightarrow \mathbb{R}^{d'}$ une fonction continue sur un ouvert $D \subset \mathbb{R}^d$ et soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans D. Soit (X_n) une suite de vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Si (X_n) converge vers X, alors $g(X_n)$ hérite du mode de convergence de (X_n), i.e

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X \Longrightarrow g(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} g(X)$$

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X \Longrightarrow g(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} g(X)$$

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} X \Longrightarrow g(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} g(X)$$

Théorème de Slutsky

Théorème

Soit (X_n) une suite de vecteurs aléatoires convergeant en loi vers X et (Y_n) une suite de vecteurs aléatoires convergeant en probabilité vers un vecteur constant c. Alors

$$X_n + Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X + c$$

et

$$X_n Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} Xc \quad \textit{et} \quad Y_n X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} cX$$

Remarque : Les résultats précédents sous entendent bien évidemment que les dimensions de X et c sont "adaptées".

Théorèmes limites

Théorème (Loi des grands nombres)

Soient $X_1, \dots, X_n$ *une suite de vecteurs alétoires indépendants et identiquement distribués tel que* $\mathbb{E}\left[\|X_1\|\right] < +\infty$. *Alors*

$$\overline{X}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} \mathbb{E}\left[X_1\right].$$

Théorème (Théorème Central Limite)

Soient $X_1, \dots, X_n$ *une suite de vecteurs aléatoires indépendants et identiquement distribuées tel que* $\mathbb{E}\left[\|X_1\|^2\right] < +\infty$. *Alors*

$$\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \mathbb{E}\left[X_1\right]\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, Var\left[X_1\right]\right).$$

Delta méthode

Théorème

Soit (X_n) une suite de vecteurs aléatoires, X un vecteur aléatoire, v_n une suite de réels telle que $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ et m un vecteur tel que

$$v_n\left(X_n - m\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X.$$

Soit $g = (g_1, \ldots, g_{d'}) : D \longrightarrow \mathbb{R}^{d'}$ avec $m \in D \subset \mathbb{R}^d$ une fonction continuement différentiable, alors

$$v_n\left(g\left(X_n\right) - g(m)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} J_g(m)X$$

où $J_g(m) = \left(\frac{\partial}{\partial m_i} g_j(m)\right)_{i,j}$ est la matrice Jacobienne de g en m.

Cas particulier

Soit (X_n) une suite d'estimateurs de m asymptotiquement normaux, i.e il existe une matrice $\Sigma \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ tel que

$$\sqrt{n}\,(X_n - m) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\,(0, \Sigma)\,.$$

Soit $g = (g_1, \ldots, g_{d'}) : D \longrightarrow \mathbb{R}^{d'}$ avec $m \in D \subset \mathbb{R}^d$ une fonction continuement différentiable, alors

$$\sqrt{n}\,(g\,(X_n) - g(m)) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, J_g(m)\Sigma J_g(m)^T\right).$$

V. Théorème de Cochran et applications

Théorème de Cochran

Théorème (Théorème de Cochran)

Soit X une vecteur aléaoire de $\mathbb{R}^n$ suivant une loi $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2 I_n\right)$ avec $\sigma^2 > 0$. Soit $\mathbb{R}^n = E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_p$ une décomposition de $\mathbb{R}^n$ en somme directe de p sous-espaces vectoriels orthogonaux de dimensions respectives $d_1, \ldots, d_p$. Soit P_k le projecteur orthogonal sur E_k et $Y_k = P_k X$ la projection orthogonale de X sur E_k.

1. *Les projections $Y_1, \ldots, Y_p$ sont des vecteurs gaussiens indépendants et $Y_k \sim \mathcal{N}\left(P_k m, \sigma^2 P_k\right)$.*
2. *Les variables aléatoires $\|Y_1 - P_1 m\|^2, \ldots, \left\|Y_p - P_p m\right\|^2$ sont indépendantes et*

$$\frac{\|Y_k - P_k m\|^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{d_k}$$

Corollaire

Corollaire

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec $X_1 \sim \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$. On a alors

1. $\overline{X}_n \sim \mathcal{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.
2. $\frac{n-1}{\sigma^2} S_n^2 \sim \chi^2_{n-1}$.
3. $\overline{X}_n$ *et* S_n^2 *sont indépendantes.*

Autres résultats

Proposition

Soient Z, Z_p, Z_q trois variables aléatoires telles que

1. $Z = Z_p + Z_q$
2. $Z_p \sim \chi^2_p$ *et* $Z_q \sim \chi^2_q$
3. Z_p *et* Z_q *sont indépendantes*

alors $Z \sim \chi_{p+q}$.

Test du Khi deux

Corollaire (Test du Khi deux d'ajustement)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{a_1, \ldots, a_K\}$ avec $\mathbb{P}[X = a_k] = p_k > 0$. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d de même loi que X. Soit $E_k = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i = a_k}$. On a alors

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{(E_k - np_k)^2}{np_k} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \chi^2_{K-1}.$$