

Eléments de statistique

Intervalles de confiance et tests

A. Godichon-Baggioni

I. Intervalles de confiance

INTERVALLES DE CONFIANCE

Définition

Soit $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ et $\alpha \in (0, 1)$. On appelle *intervalle de confiance* pour θ de niveau $1 - \alpha$ tout intervalle aléatoire $IC_{1-\alpha}(\theta) = [a(\mathbf{X}); b(\mathbf{X})]$ tel que

$$\mathbb{P}[\theta \in [a(\mathbf{X}); b(\mathbf{X})]] = 1 - \alpha.$$

Attention! On ne peut pas dire que la probabilité que θ appartienne à la réalisation de l'intervalle de confiance est de $1 - \alpha$.

EXEMPLES

Exemple 1 : la loi uniforme. Soit $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) \sim \mathcal{U}([0, \theta])^{\otimes n}$. On a

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left[X_{(n)}; X_{(n)}\alpha^{-1/n} \right]$$

Exemple 2 : le lancer de pièce. Soit $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) \sim \mathcal{B}(\theta)^{\otimes n}$ et $\hat{\theta}_n = \bar{X}_n$ un estimateur de θ . En appliquant l'inégalité de Tchebychev,

$$\mathbb{P} \left[\hat{\theta}_n - \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}} \leq \theta \leq \hat{\theta}_n + \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}} \right] \geq 1 - \alpha.$$

UNILATÈRE VS BILATÈRE

Soit $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) \sim \mathcal{N}(\theta, 1)^{\otimes n}$.

On peut considérer

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left[\bar{X}_n \pm q_{1-\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

où $q_{1-\alpha}$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de la loi normale centrée réduite. On parle d'intervalle bilatère.

On peut considérer

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left[\bar{X}_n - q_{1-\alpha} \frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty \right].$$

On parle ici d'intervalle unilatère.

INTERVALLES DE CONFIANCE ASYMPTOTIQUES

Lorsque n est suffisamment grand et que l'on dispose de résultats asymptotiques type normalité asymptotique, on peut utiliser des intervalles asymptotiques, i.e tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}[\theta \in [a(\mathbf{X}); b(\mathbf{X})]] = 1 - \alpha.$$

Exemple : le lancer de pièce. On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left[\hat{\theta}_n - q_{1-\alpha/2} \frac{\sqrt{\hat{\theta}_n(1-\hat{\theta}_n)}}{\sqrt{n}} \leq \theta \leq \hat{\theta}_n + q_{1-\alpha/2} \frac{\sqrt{\hat{\theta}_n(1-\hat{\theta}_n)}}{\sqrt{n}} \right] = 1 - \alpha$$

où $q_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de la loi normale centrée réduite.

II. Tests

OBJECTIF

Le lancer de pièce : On souhaite savoir si la pièce est équilibrée. On jette 10 fois une pièce et on obtient 9 "Face". Un test permet de dire avec un certain risque si cette proportion de "Face" est seulement due à la fluctuation d'échantillonnage ou bien si la pièce est truquée.

HYPOTHÈSE NULLE ET HYPOTHÈSE ALTERNATIVE

Le principe d'un test est de répondre par oui ou non à une question sur le paramètre d'une expérience statistique, ce qui revient à considérer $\Theta_0, \Theta_1 \subset \Theta$ tel que

$$\Theta_0 \sqcup \Theta_1 = \Theta,$$

et de déterminer, avec un certain risque et à partir des observations, si $\theta \in \Theta_0$ ou $\theta \in \Theta_1$.

- ▶ $H_0 : \theta \in \Theta_0$ est appelée l'hypothèse nulle.
- ▶ $H_1 : \theta \in \Theta_1$ est appelée l'hypothèse alternative.

EXEMPLES : LE LANCER DE PIÈCE

Exemple 1 : Tester si la pièce est équilibrée revient à tester $H_0 : \theta = 1/2$ contre $H_1 : \theta \neq 1/2$, i.e à poser $\Theta_0 = \{1/2\}$ et $\Theta_1 = [0, 1/2) \cup (1/2, 1]$.

Exemple 2 : On peut tester si la pièce "produit" plus de Piles, i.e $H_0 : \theta > 1/2$ contre $H_1 : \theta \leq 1/2$, i.e poser $\Theta_0 = (1/2, 1]$ et $\Theta_1 = [0, 1/2]$.

TESTS D'HYPOTHÈSE

Un test d'hypothèse est une statistique $T(\mathbf{X})$ à valeurs dans $\{0, 1\}$ tel que H_0 n'est pas rejetée si $T(\mathbf{X}) = 0$ et inversement.
Le domaine

$$ZR = T^{-1}(\{1\}) = \{\mathbf{X} \in E, T(\mathbf{X}) = 1\}$$

est appelé zone de rejet du test.

RISQUES, NIVEAU ET PUISSANCE D'UN TEST

On appelle

- ▶ risque de première espèce l'application $\underline{\alpha} : \Theta_0 \rightarrow [0, 1]$ définie pour tout $\theta \in \Theta_0$ par

$$\underline{\alpha}(\theta) = \mathbb{E}_\theta [T(\mathbf{X})] = \mathbb{P}_\theta [T(\mathbf{X}) = 1].$$

- ▶ taille du test le réel

$$\alpha^* = \sup_{\theta \in \Theta_0} \underline{\alpha}(\theta) = \sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbb{P}_\theta [T(\mathbf{X}) = 1].$$

- ▶ risque de deuxième espèce l'application $\underline{\beta} : \Theta_1 \rightarrow [0, 1]$ définie pour tout $\theta \in \Theta_1$ par

$$\underline{\beta}(\theta) = 1 - \mathbb{E}_\theta [T(\mathbf{X})] = \mathbb{P}_\theta [T(\mathbf{X}) = 0]$$

- ▶ fonction puissance du test l'application $\pi : \Theta \rightarrow [0, 1]$ définie pour tout $\theta \in \Theta$ par

$$\pi(\theta) = \mathbb{E}_\theta [T(\mathbf{X})] = \mathbb{P}_\theta [T(\mathbf{X}) = 1].$$

REMARQUES

Remarque 1 : Soit $\alpha \in (0, 1)$. Un test est dit de niveau α si sa taille est majorée par α .

Remarque 2 : Soit $\theta \in \Theta_0$. La quantité $\underline{\alpha}(\theta)$ est la probabilité de rejeter H_0 (alors que H_0 est vraie). On parle de faux positif.

Remarque 3 : Soit $\theta \in \Theta_1$. La quantité $\underline{\beta}(\theta)$ est la probabilité de ne pas rejeter H_0 (alors que H_0 est fausse). On parle de faux négatif.

EXEMPLE

Soit $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) \sim \mathcal{N}(\theta, 1)^{\otimes n}$. On souhaite tester au risque $\alpha \in (0, 1)$

$$H_0 : \theta \leq 0 \quad \text{contre} \quad H_1 : \theta > 0.$$

On considère $\hat{\theta}_n = \bar{X}_n$ et on a la zone de rejet

$$ZR = \left\{ \bar{X}_n \geq \frac{q_{1-\alpha}}{\sqrt{n}} \right\}$$

où $q_{1-\alpha}$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha$ de la loi normale centrée réduite et donc

$$T(\mathbf{X}) = \mathbf{1}_{\bar{X}_n \geq \frac{q_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}}$$

INTERVALLES DE CONFIANCE ET TESTS

Proposition

Soit $\alpha \in (0, 1)$, et pour tout $\theta \in \Theta_0$, on a $(\underline{\theta}(\mathbf{X}); \bar{\theta}(\mathbf{X}))$ un intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ de θ . Alors, le test $T(\mathbf{X}) = 1$ ssi $\Theta_0 \cap (\underline{\theta}(\mathbf{X}); \bar{\theta}(\mathbf{X})) = \emptyset$ est un test de niveau α .

Exemple : Soit $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) \sim \mathcal{N}(\theta, 1)^{\otimes n}$, alors

$$\Theta_0 \cap \left[\bar{X}_n - \frac{q_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}; +\infty \right] = \emptyset \Leftrightarrow T(\mathbf{X}) = 1.$$

P-VALUE

Définition

Pour une réalisation \mathbf{x} , on appelle *p-value* du test associé aux régions de rejets ZR_α la quantité

$$\alpha_0(\mathbf{x}) = \inf \{ \alpha \in [0, 1], \mathbf{x} \in ZR_\alpha \} = \inf \{ \alpha \in [0, 1], \text{ "On rejette } H_0 \text{"} \}.$$

Exemple : Soit $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) \sim \mathcal{N}(\theta, 1)^{\otimes n}$, et on note \bar{x}_n la réalisation de \bar{X}_n . Alors

$$\alpha_0(\mathbf{x}) = \mathbb{P} [\mathcal{N}(0, 1) \geq \sqrt{n}\bar{x}_n].$$

Remarque : Faire un test de niveau α revient à rejeter H_0 si la *p-value* est inférieure à α et inversement.