Mise à niveau

Intervalles de confiance et tests

A. Godichon-Baggioni

I. Intervalles de confiance

Intervalles de confiance

Définition

Soit $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ *et* $\alpha \in (0,1)$. *On appelle intervalle de confiance pour* θ *de niveau* $1-\alpha$ *tout intervalle aléatoire* $IC_{1-\alpha}(\theta) = [a(\mathbf{X}) ; b(\boldsymbol{X})]$ *tel que*

$$\mathbb{P}[\theta \in [a(\mathbf{X}) ; b(\boldsymbol{X})]] = 1-\alpha.$$

Attention ! On ne peut pas dire que la probabilité que θ appartienne à la réalisation de l'intervalle de confiance est de $1-\alpha$.

EXEMPLES

Exemple 1 : la loi uniforme. Soit $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n) \sim \mathcal{U}\left([0,\theta]\right)^{\otimes n}$. On a

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left[X_{(n)}; X_{(n)}\alpha^{-1/n}\right]$$

Exemple 2 : le lancer de pièce. Soit $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n) \sim \mathcal{B}(\theta)^{\otimes n}$ et $\hat{\theta}_n = \overline{X}_n$ un estimateur de θ. En appliquant l'inégalité de Tchebychev,

$$\mathbb{P}\left[\hat{\theta}_n - \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}} \leq \theta \leq \hat{\theta}_n + \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}}\right] \geq 1 - \alpha.$$

Unilatère Vs Bilatère

Soit $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n) \sim \mathcal{N}(\theta, 1)^{\otimes n}$.

On peut considérer

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left[\overline{X}_n \pm q_{1-\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

où $q_{1-\alpha}$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de la loi normale centrée réduite. On parle d'intervalle bilatère.

On peut considérer

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left[\overline{X}_n - q_{1-\alpha} \frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty\right].$$

On parle ici d'intervalle unilatère.

INTERVALLES DE CONFIANCE ASYMPTOTIQUES

Lorsque n est suffisamment grand et que l'on dispose de résultats asymptotiques type normalité asymptotique, on peut utiliser des intervalles asymptotiques, i.e tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left[\theta \in \left[a\left(\mathbf{X}\right); b\left(\mathbf{X}\right)\right]\right] = 1 - \alpha.$$

Exemple : le lancer de pièce. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left[\hat{\theta}_n - q_{1-\alpha/2}\frac{\sqrt{\hat{\theta}_n(1-\hat{\theta}_n)}}{\sqrt{n}} \leq \theta \leq \hat{\theta}_n + q_{1-\alpha/2}\frac{\sqrt{\hat{\theta}_n(1-\hat{\theta}_n)}}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

où $q_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi normale centrée réduite.

II. Tests

Objectif

Le lancer de pièce : On souhaite savoir si la pièce est équilibrée. On jette 10 fois une pièce et on obtient 9 ″Face″. Un test permet de dire avec un certain risque si cette proportion de ″Face″ est seulement due à la fluctuation d'échantillonnage ou bien si la pièce est truquée.

Hypothèse nulle et hypothèse alternative

Le principe d'un test est de répondre par oui ou non à une question sur le paramètre d'une expérience statistique, ce qui revient à considérer $\Theta_0, \Theta_1 \subset \Theta$ tel que

$$\Theta_0 \sqcup \Theta_1 = \Theta,$$

et de déterminer, avec un certain risque et à partir des observations, si $\theta \in \Theta_0$ ou $\theta \in \Theta_1$.

- H0 : $\theta \in \Theta_0$ est appelée l'hypothèse nulle.
- H1 : $\theta \in \Theta_1$ est appelée l'hypothèse alternative.

EXEMPLES : LE LANCER DE PIÈCE

Exemple 1 : Tester si la pièce est équilibrée revient à tester H0 : $\theta = 1/2$ contre H1 : $\theta \neq 1/2$, i.e à poser $\Theta_0 = \{1/2\}$ et $\Theta_1 = [0, 1/2) \cup (1/2, 1]$.

Exemple 2 : On peut tester si la pièce "produit" plus de Piles, i.e H0 : $\theta > 1/2$ contre H1 : $\theta \leq 1/2$, i.e poser $\Theta_0 = (1/2, 1]$ et $\Theta_1 = [0, 1/2]$.

TESTS D'HYPOTHÈSE

Un test d'hypothèse est une statistique $T(\mathbf{X})$ à valeurs dans $\{0,1\}$ tel que H0 n'est pas rejettée si $T(\mathbf{X}) = 0$ et inversement. Le domaine

$$ZR = T^{-1}(\{1\}) = \{\mathbf{X} \in E, T(\mathbf{X}) = 1\}$$

est appelé zone de rejet du test.

RISQUES, NIVEAU ET PUISSANCE D'UN TEST

On appelle

- risque de première espèce l'application $\underline{\alpha} : \Theta_0 \to [0, 1]$ définie pour tout $\theta \in \Theta_0$ par

$$\underline{\alpha}(\theta) = \mathbb{E}_\theta \left[T \left(\mathbf{X} \right) \right] = \mathbb{P}_\theta \left[T(\mathbf{X}) = 1 \right].$$

- taille du test le réel

$$\alpha^\star = \sup_{\Theta \in \Theta_0} \underline{\alpha}(\theta) = \sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbb{P}_\theta \left[T(\mathbf{X}) = 1 \right].$$

- risque de deuxième espèce l'application $\underline{\beta} : \Theta_1 \to [0, 1]$ définie pour tout $\theta \in \Theta_1$ par

$$\underline{\beta}(\theta) = 1 - \mathbb{E}_\theta \left[T(\mathbf{X}) \right] = \mathbb{P}_\theta \left[T(\mathbf{X}) = 0 \right]$$

- fonction puissance du test l'application $\pi : \Theta \to [0, 1]$ définie pour tout $\theta \in \Theta$ par

$$\pi(\theta) = \mathbb{E}_\theta[T(\mathbf{X})] = \mathbb{P}_\theta \left[T(\mathbf{X}) = 1 \right].$$

Remarques

Remarque 1 : Soit $\alpha \in (0,1)$. Un test est dit de niveau α si sa taille est majorée par α.

Remarque 2 : Soit $\theta \in \Theta_0$. La quantité $\underline{\alpha}(\theta)$ est la probabilité de rejetter H0 (alors que H0 est vraie). On parle de faux positif.

Remarque 3 : Soit $\theta \in \Theta_1$. La quantité $\underline{\beta}(\theta)$ est la probabilité de ne pas rejetter H0 (alors que H0 est fausse). On parle de faux négatif.

EXEMPLE

Soit $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n) \sim \mathcal{N}(\theta, 1)^{\otimes n}$. On souhaite tester au risque $\alpha \in (0, 1)$

$$H0 : \theta \leq 0 \qquad \text{contre} \qquad H1 : \theta > 0.$$

On considère $\hat{\theta}_n = \overline{X}_n$ et on a la zone de rejet

$$ZR = \left\{ \overline{X}_n \geq \frac{q_{1-\alpha}}{\sqrt{n}} \right\}$$

où $q_{1-\alpha}$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha$ de la loi normale centrée réduite et donc

$$T(\mathbf{X}) = \mathbf{1}_{\overline{X}_n \geq \frac{q_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}}$$

Intervalles de confiance et tests

Proposition

Soit $\alpha \in (0,1)$, et pour tout $\theta \in \Theta_0$, on a $\left(\underline{\theta}(\boldsymbol{X}); \overline{\theta}(\boldsymbol{X})\right)$ un intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$ de θ. Alors, le test $T(\mathbf{X}) = 1$ ssi $\Theta_0 \cap \left(\underline{\theta}(\boldsymbol{X}); \overline{\theta}(\boldsymbol{X})\right) = \emptyset$ est un test de niveau α.

Exemple : Soit $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n) \sim \mathcal{N}(\theta, 1)^{\otimes n}$, alors $\Theta_0 \cap \left[\overline{X}_n - \frac{q_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}; +\infty\right[= \emptyset \Leftrightarrow T(\mathbf{X}) = 1.$

P-VALUE

Définition

Pour une réalisation $\boldsymbol{x}$, on appelle p-value du test associé aux régions de rejets ZR_α la quantité

$$\alpha_0(\boldsymbol{x}) = \inf\left\{\alpha \in [0,1], \boldsymbol{x} \in ZR_\alpha\right\} = \inf\left\{\alpha \in [0,1], \text{"On rejette H0"}\right\}.$$

Exemple : Soit $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n) \sim \mathcal{N}(\theta, 1)^{\otimes n}$, et on note $\overline{x}_n$ la réalisation de $\overline{X}_n$. Alors

$$\alpha_0(\mathbf{x}) = \mathbb{P}\left[\mathcal{N}(0,1) \geq \sqrt{n}\overline{x}_n\right].$$

Remarque : Faire un test de niveau α revient à rejetter H0 si la p-value est inférieure à α et inversement.