

## Feuille de TD 4 Correction

**Exercice 1 :** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes telles que  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$  et  $Y$  suit une loi de Rademacher de paramètre  $p \in (0, 1)$ , i.e  $\mathbb{P}[Y = 1] = p$  et  $\mathbb{P}[Y = -1] = 1 - p$ .

1. Montrer que  $XY \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

On a, par symétrie de la loi normale, pour tout  $x$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[XY \leq x] &= \mathbb{P}[XY \leq x|Y = 1] \mathbb{P}[Y = 1] + \mathbb{P}[XY \leq x|Y = -1] \mathbb{P}[Y = -1] \\ &= p\mathbb{P}[X \leq x] + (1 - p)\mathbb{P}[-X \leq x] \\ &= p\mathbb{P}[X \leq x] + (1 - p)\mathbb{P}[X \leq x] \\ &= \mathbb{P}[X \leq x] \end{aligned}$$

2. Montrer que  $\text{Cov}(X, XY) = 2p - 1$  On a  $\mathbb{E}[Y] = 2p - 1$  et  $\mathbb{E}[XY] = 0$ , et donc

$$\text{Cov}(X, XY) = \mathbb{E}[XXY] = \mathbb{E}[X^2] \mathbb{E}[Y] = 2p - 1$$

3. Les variables  $X$  et  $XY$  sont-elles indépendantes ?

Pour  $p \neq 1/2$ , elles ne peuvent pas être indépendantes. Pour  $p = 1/2$ , on a pour tout  $x, y$

$$\mathbb{P}[X \leq x, XY \leq y] = p\mathbb{P}[X \leq x, X \leq y] + (1 - p)\mathbb{P}[X \leq x, X \geq -y]$$

En prenant par exemple  $x = 1$  et  $y = -2$ , on obtient donc

$$\mathbb{P}[X \leq 1, XY \leq -2] = 1/2\mathbb{P}[X \leq -2] \neq \mathbb{P}[X \leq 1] \mathbb{P}[XY \leq -2] = \mathbb{P}[X \leq 1] \mathbb{P}[X \leq -2].$$

On a donc un exemple de variables aléatoires avec une covariance nulle mais qui ne sont pas indépendantes.

4. Montrer que le vecteur  $(X, XY)$  n'est pas gaussien.

On considère la combinaison linéaire  $Z = X + XY = X(1 + Y)$ . A noter que  $\mathbb{E}[Z] = 0$ . On suppose par l'absurde que  $Z$  est gaussien, et par symétrie sa médiane doit donc valoir

$\mathbb{E}[Z] = 0$ . Or

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[Z \leq 0] &= \mathbb{P}[X(1+Y) \leq 0 | Y = 1] \mathbb{P}[Y = 1] + \mathbb{P}[X(1+Y) \leq 0 | Y = -1] \mathbb{P}[Y = -1] \\ &= \mathbb{P}[2X \leq 0] \mathbb{P}[Y = 1] + 1 - p \\ &= p\mathbb{P}[X \leq 0] + 1 - p = 1 - \frac{1}{2}p \neq \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

A noter que pour  $p = 1/2$ , on a covariance nulle et pas indépendance, donc le vecteur ne pouvait pas être gaussien.

**Exercice 2 :** On considère le modèle

$$Y_i = m + \sigma\epsilon_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

où les v.a.  $\epsilon_i$  sont i.i.d. de loi commune  $\mathcal{N}(0, 1)$ , pour des paramètres  $m \in \mathbb{R}$  et  $\sigma > 0$ . On note  $\bar{Y}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n Y_i$ .

1. On suppose que  $\sigma$  est connu.

(a) Déterminer un intervalle de confiance symétrique pour  $m$  de niveau  $1 - \alpha$ .

Comme  $\bar{Y}_n \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2/n)$ , on a  $\sqrt{n}(\bar{Y}_n - m)/\sigma \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . On a donc pour tout  $u \geq 0$ ,

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{n}\left|\frac{\bar{Y}_n - m}{\sigma}\right| \leq u\right) = 2\Phi(u) - 1.$$

avec  $\Phi$  la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Ainsi, on obtient l'intervalle de confiance de niveau  $1 - \alpha$  :

$$I(m) = \left[ \bar{Y}_n - \sigma \frac{\Phi^{-1}(1 - \alpha/2)}{\sqrt{n}} ; \bar{Y}_n + \sigma \frac{\Phi^{-1}(1 - \alpha/2)}{\sqrt{n}} \right].$$

(b) Pour  $\sigma = 3$ , combien d'observations doit-on avoir pour que la longueur de l'intervalle de confiance de niveau 95% soit inférieure à 2? Donner la forme de cet intervalle au niveau 95% pour  $\sigma = 3$ ,  $n = 25$  et  $\bar{y}_{25} = \bar{Y}_{25}(\omega) = 20$ . (Indication :  $\Phi^{-1}(0.975) \approx 2$ .)

La longueur de l'intervalle de confiance de niveau  $1 - \alpha$  est donnée par la fonction

$$L(n) = 2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}(1 - \alpha/2).$$

Pour  $\sigma = 3$  et  $1 - \alpha = 0.95$ , on a pour tout  $n$ ,

$$L(n) \leq 2 \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}(0.975) \leq 1 \Leftrightarrow (3\Phi^{-1}(0.975))^2 \leq n.$$

De  $\Phi^{-1}(0.975) \simeq 2$  on déduit que  $(3\Phi^{-1}(0.975))^2 \simeq 36$ . Ainsi, il faut au minimum  $n_0 = 36$  observations pour que l'intervalle de confiance  $I(m)$  soit de longueur plus petite que 2.

Pour  $1 - \alpha = 0.95$ ,  $\sigma = 3$ ,  $n = 25$  et  $\bar{y}_{25} = 20$ , la réalisation de l'intervalle de confiance  $I(m)$  est :

$$\begin{aligned} & \left[ \bar{y}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}(1 - \alpha/2); \bar{y}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}(1 - \alpha/2) \right] \\ &= \left[ 20 - \frac{3}{\sqrt{25}} \Phi^{-1}(0.975); 20 + \frac{3}{\sqrt{25}} \Phi^{-1}(0.975) \right] \\ &\simeq [18.8; 21.2]. \end{aligned}$$

- (c) Soit  $\alpha \in [0, 1]$ . Proposer un test de niveau  $\alpha$  pour l'hypothèse  $H_0 : m = m_0$  contre  $H_1 : m \neq m_0$ . Pour  $\sigma = 3$ ,  $n = 25$ ,  $\bar{y}_{25} = \bar{Y}_{25}(\omega) = 20$  et  $m_0 = 18.9$ , quelle est la  $p$ -valeur de ce test? Peut-on accepter l'hypothèse  $H_0$  aux niveaux 1%, 5% et 10%? (Indication :  $\Phi\left(\frac{5.5}{3}\right) \simeq \Phi(1.83) \simeq 0.97$ .)

On rejette  $H_0$  si

$$m_0 \notin \left[ \bar{Y}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}(1 - \alpha/2), \bar{Y}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}(1 - \alpha/2) \right],$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{n} \left| \frac{\bar{Y}_n - m_0}{\sigma} \right| > \Phi^{-1}(1 - \alpha/2),$$

ou encore

$$\alpha > 2 \left( 1 - \Phi \left( \sqrt{n} \left| \frac{\bar{Y}_n - m_0}{\sigma} \right| \right) \right).$$

La  $p$ -valeur du test est donc donnée par

$$\alpha_0 = 2 \left( 1 - \Phi \left( \sqrt{n} \left| \frac{\bar{Y}_n - m_0}{\sigma} \right| \right) \right).$$

Pour  $\sigma = 3$ ,  $n = 25$ ,  $\bar{y}_{25} = 20$  et  $m_0 = 18.9$ , on obtient donc la  $p$ -valeur

$$\alpha_0 = 2 \left( 1 - \Phi \left( \sqrt{25} \left| \frac{20 - 18.9}{3} \right| \right) \right) \simeq 2(1 - \Phi(1.83)) \simeq 2(1 - 0.97) \simeq 0.06.$$

On rejette donc  $H_0$  au niveau 10%, et on accepte  $H_0$  aux niveaux 5% et 1%.

2. On ne suppose plus que  $\sigma$  est connu. On pose  $\hat{\sigma}_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_n)^2}$ .

- (a) Écrire le modèle de régression associé aux hypothèses énoncées plus haut et donner l'estimateur des moindres carrés.

Le modèle de régression associé est  $Y = X\beta + \sigma\varepsilon$ , avec  $X = [1, \dots, 1]^t \in \mathbb{R}^n$ ,

$\beta = m \in \mathbb{R}$  et  $\varepsilon = [\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n]^t \in \mathbb{R}^n$ . L'estimateur des moindres carrés est ainsi

$$\hat{\beta} = (X^t X)^{-1} X^t Y = \bar{Y}_n.$$

- (b) Énoncer le théorème de Cochran dans ce cas.

Étant donné le modèle de régression,  $Y \sim \mathcal{N}(m(1 \cdots 1)^t, \sigma^2 I_n)$  et la matrice de projection associée est :

$$P = X(X^t X)^{-1} X^t = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

De plus,  $PY = (\bar{Y}_n \cdots \bar{Y}_n)^t$ ,  $P_\perp Y = (I_n - P)Y = Y - (\bar{Y}_n \cdots \bar{Y}_n)^t$ ,  
 $P(m(1 \cdots 1)^t) = m(1 \cdots 1)^t$  et  $P_\perp(m(1 \cdots 1)^t) = 0$ . D'après le théorème de Cochran,  
—  $PY \sim \mathcal{N}(m(1 \cdots 1)^t, \sigma^2 P)$ ,  $P_\perp Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 P_\perp)$ ;  
—  $PY$  et  $P_\perp Y$  sont indépendants ;  
—  $\frac{\|P(Y - m(1 \cdots 1)^t)\|^2}{\sigma^2} = \frac{n(\bar{Y}_n - m)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$ ,  $\frac{\|Y - (\bar{Y}_n \cdots \bar{Y}_n)^t\|^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_n)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n - 1)$ .

(c) Montrer que  $\hat{\sigma}_n^2$  est un estimateur sans biais et consistant de  $\sigma^2$ .

On vient de voir que

$$(n - 1)\hat{\sigma}_n^2/\sigma^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_n)^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n - 1).$$

Ainsi,  $\mathbb{E}[(n - 1)\hat{\sigma}_n^2/\sigma^2] = n - 1$ , c'est-à-dire  $\mathbb{E}[\hat{\sigma}_n^2] = \sigma^2$  donc  $\hat{\sigma}_n^2$  est sans biais. De plus, la loi des grands nombres et le théorème de continuité impliquent que

$$s_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_n)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^2 - \bar{Y}_n^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \mathbb{E}[Y_1^2] - m^2 = \sigma^2,$$

i.e.  $s_n^2$  est un estimateur convergent de  $\sigma^2$ . Ainsi,  $\hat{\sigma}_n^2 = \frac{n}{n-1} s_n^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$ .

(d) Donner la loi exacte de  $\sqrt{n} \frac{\bar{Y}_n - m}{\hat{\sigma}_n}$ .

On a :

$$\frac{\hat{\beta} - \beta}{\hat{\sigma}_n \sqrt{1/n}} = \sqrt{n} \frac{\bar{Y}_n - m}{\hat{\sigma}_n} \sim \mathcal{T}(n - 1).$$

(e) Tester l'hypothèse  $H_0 : \sigma^2 = 3$  contre  $H_1 : \sigma^2 \neq 3$  au niveau  $\alpha$ .

un intervalle de confiance de niveau  $(1 - \alpha)$  pour  $\sigma^2$  est donné par

$$\left[ \frac{(n - 1)\hat{\sigma}_n^2}{c_{n-1}(1 - \alpha/2)}, \frac{(n - 1)\hat{\sigma}_n^2}{c_{n-1}(\alpha/2)} \right]$$

où  $c_{n-1}(\alpha/2)$  et  $c_{n-1}(1 - \alpha/2)$  sont les quantiles d'ordres  $\alpha/2$  et  $1 - \alpha/2$  d'une loi  $\chi_{n-1}^2$  (ici  $p = 1$  si  $p$  est le nombre de variables explicatives). Ainsi, le test consistant à rejeter  $H_0$  si

$$3 \notin \left[ \frac{(n - 1)\hat{\sigma}_n^2}{c_{n-1}(1 - \alpha/2)}, \frac{(n - 1)\hat{\sigma}_n^2}{c_{n-1}(\alpha/2)} \right]$$

i.e., si

$$\hat{\sigma}_n^2 > 3 \frac{c_{n-1}(1 - \alpha/2)}{n-1} \quad \text{ou} \quad \hat{\sigma}_n^2 < 3 \frac{c_{n-1}(\alpha/2)}{n-1}$$

est de niveau  $\alpha$ .

- (f) Déterminer un intervalle de confiance de niveau  $1 - \alpha$  pour  $m$ . En déduire un test pour l'hypothèse  $H_0 : m = m_0$  contre  $H_1 : m \neq m_0$  au niveau  $\alpha$ .

un intervalle de confiance de niveau  $1 - \alpha$  pour  $m$  est donné par

$$J(m) = \left[ \bar{Y}_n - \hat{\sigma}_n \frac{t_{n-1}(1 - \alpha/2)}{\sqrt{n}}, \bar{Y}_n + \hat{\sigma}_n \frac{t_{n-1}(1 - \alpha/2)}{\sqrt{n}} \right].$$

où  $t_{n-1}(1 - \alpha/2)$  est le quantile d'ordre  $1 - \alpha/2$  d'une loi de Student  $\mathcal{T}(n - 1)$ .

On peut construire un test de niveau  $\alpha$  en rejetant  $H_0$  si  $m_0 \notin J(m)$ , c'est-à-dire si

$$\sqrt{n} \left| \frac{\bar{Y}_n - m_0}{\hat{\sigma}_n} \right| > t_{n-1}(1 - \alpha/2).$$

- (g) Tester maintenant  $H_0 : m \geq m_0$  contre  $H_1 : m < m_0$  au niveau  $\alpha$ . Calculer la  $p$ -valeur lorsque  $m_0 = 12.5$ ,  $n = 25$ ,  $\bar{y}_{25} = \bar{Y}_{25}(\omega) = 12$  et  $\hat{\sigma}_n^2(\omega) = 1.69$ ? Peut-on accepter l'hypothèse  $H_0$  au niveau 5%? (Indication :  $F_{\mathcal{T}(24)}(-1.92) \simeq 0.03$ .)

Pour ce test unilatéral, on cherche une région de rejet de la forme  $\mathcal{R} = ] - \infty, c_\alpha[$  pour  $\bar{Y}_n$  telle que :

$$\begin{aligned} \alpha &= \sup_{m \geq m_0} \mathbb{P}(\bar{Y}_n < c_\alpha) \\ &= \sup_{m \geq m_0} \mathbb{P} \left( \sqrt{n} \frac{\bar{Y}_n - m}{\hat{\sigma}_n} < \sqrt{n} \frac{c_\alpha - m}{\hat{\sigma}_n} \right) \\ &= \sup_{m \geq m_0} F_{\mathcal{T}(n-1)} \left( \sqrt{n} \frac{c_\alpha - m}{\hat{\sigma}_n} \right) \\ &= F_{\mathcal{T}(n-1)} \left( \sqrt{n} \frac{c_\alpha - m_0}{\hat{\sigma}_n} \right), \end{aligned}$$

i.e.

$$c_\alpha = m_0 + \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\alpha).$$

Pour ce test,

$$\begin{aligned} T(Y) = 1 &\Leftrightarrow \bar{Y}_n < c_\alpha \\ &\Leftrightarrow \sqrt{n} \frac{\bar{Y}_n - m_0}{\hat{\sigma}_n} < t_{n-1}(\alpha) \\ &\Leftrightarrow F_{\mathcal{T}(n-1)} \left( \sqrt{n} \frac{\bar{Y}_n - m_0}{\hat{\sigma}_n} \right) < \alpha. \end{aligned}$$

Ainsi, la  $p$ -valeur du test  $T(Y) = 1 \Leftrightarrow \bar{Y}_n < c_\alpha$  est :

$$\alpha_0 = F_{\mathcal{T}(n-1)} \left( \sqrt{n} \frac{\bar{Y}_n - m_0}{\hat{\sigma}_n} \right).$$

Pour  $m_0 = 12,5$ ,  $n = 25$ ,  $\bar{y}_{25} = 12$  et  $\hat{\sigma}_n^2 = 1,69$ , la  $p$ -valeur est :

$$\alpha_0 = F_{\mathcal{T}(24)} \left( \sqrt{25} \left( \frac{12 - 12,5}{\sqrt{1,69}} \right) \right) \simeq F_{\mathcal{T}(24)}(-1,92) \simeq 0.03.$$

On rejette donc  $H_0$  au niveau 5%.

**Exercice 3 :** On considère le modèle suivant

$$Y_i = a + bt_i + \varepsilon_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

où les variables aléatoires  $\varepsilon_i$  sont i.i.d.  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ , les réels  $(t_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont connus et  $a, b, \sigma^2$  sont trois paramètres réels inconnus. On suppose que  $\sum_{i=1}^n t_i = 0$  et on note

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i, \quad v_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^2 > 0, \quad v_Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^2 - \bar{Y}^2 \quad \text{et} \quad \rho = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i t_i.$$

1. Préciser les conditions d'identifiabilité du modèle.

Le modèle est identifiable si et seulement si  $X$  est de rang  $p = 2$ , c'est-à-dire si et seulement si les vecteurs  $(t_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $(1)_{1 \leq i \leq n}$  ne sont pas colinéaires. Ceci est équivalent à l'existence de  $i \neq j$  tel que  $t_i \neq t_j$ , ou, considérant l'hypothèse  $\sum_{i=1}^n t_i = 0$ , à l'existence de  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $t_i \neq 0$ .

2. Calculer les estimateurs des moindres carrés  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$  et  $\hat{\sigma}^2$  de  $a, b$  et  $\sigma^2$  en fonction de  $\bar{Y}$ ,  $v_t$ ,  $v_Y$  et  $\rho$ . Quelle est leur loi jointe ?

L'estimateur des moindres carrés de  $\beta$  est donné par :

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= (X^t X)^{-1} X^t Y = \begin{pmatrix} n & \sum_i t_i \\ \sum_i t_i & \sum_i t_i^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_i Y_i \\ \sum_i t_i Y_i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n v_t \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} n \bar{Y} \\ n \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Y} \\ \frac{\rho}{v_t} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Y} \\ \frac{\rho}{v_t} \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, l'estimateur de  $\sigma^2$  est défini par :

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n-2} \|Y - X\hat{\beta}\|^2 = \frac{1}{n-2} \sum_i \left( Y_i - \bar{Y} - \frac{\rho}{v_t} t_i \right)^2 \\ &= \frac{1}{n-2} \left( \sum_i (Y_i - \bar{Y})^2 + \frac{\rho^2}{v_t^2} \sum_i t_i^2 - 2\frac{\rho}{v_t} \sum_i t_i Y_i + 0 \right) \\ &= \frac{1}{n-2} \left( n v_Y + \frac{\rho^2}{v_t^2} n v_t - 2\frac{\rho}{v_t} n \rho \right) = \frac{n}{n-2} \left( v_Y - \frac{\rho^2}{v_t} \right).\end{aligned}$$

Pour rappel,  $\hat{\beta}$  consiste en les coordonnées dans la base des colonnes de  $X$ , de la projection de  $Y$  sur l'espace engendré par les colonnes de  $X$ , noté  $\mathcal{M}(X)$ , et

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \|Y - X\hat{\beta}\|^2 = \frac{1}{n-2} \|P_{\mathcal{M}(X)^\perp} Y\|^2.$$

D'après le cours, les estimateurs  $\hat{\beta}$  et  $\hat{\sigma}^2$  sont indépendants et ont pour loi :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} &\sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \sigma^2 (X^t X)^{-1}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \sigma^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n v_t} \end{pmatrix}\right); \\ \frac{(n-2)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} &\sim \chi_{(n-2)}^2.\end{aligned}$$

3. Soit  $\alpha \in [0, 1]$ . Donner un intervalle de confiance de niveau  $1 - \alpha$  pour chacun des paramètres  $a$  et  $b$ . En déduire un rectangle de confiance de niveau 95% pour le paramètre  $(a, b)$ .

D'après le cours, on a les intervalles de confiance de niveau  $1 - \alpha$  suivants :

— pour  $a$

$$\left[ \hat{a} - \frac{t_{n-2}(1-\alpha/2)\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \hat{a} + \frac{t_{n-2}(1-\alpha/2)\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \right]$$

— pour  $b$

$$\left[ \hat{b} - \frac{t_{n-2}(1-\alpha/2)\hat{\sigma}}{\sqrt{n v_t}}, \hat{b} + \frac{t_{n-2}(1-\alpha/2)\hat{\sigma}}{\sqrt{n v_t}} \right]$$

Comme  $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ , on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(|\hat{a} - a| > \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} t_{n-2}(1-\alpha/4) \text{ ou } |\hat{b} - b| > \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n v_t}} t_{n-2}(1-\alpha/4)\right) \\ \leq \mathbb{P}\left(|\hat{a} - a| > \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} t_{n-2}(1-\alpha/4)\right) + \mathbb{P}\left(|\hat{b} - b| > \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n v_t}} t_{n-2}(1-\alpha/4)\right) \\ \leq \alpha/2 + \alpha/2 = \alpha.\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{P}\left(|\hat{a} - a| \leq \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} t_{n-2}(1-\alpha/4) \text{ et } |\hat{b} - b| \leq \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n v_t}} t_{n-2}(1-\alpha/4)\right) \geq 1 - \alpha.$$

Ceci implique que la région rectangulaire donnée par

$$\left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid |\hat{a} - a| \leq \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} t_{n-2}(0.9875) \text{ et } |\hat{b} - b| \leq \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{nv_t}} t_{n-2}(0.9875) \right\}$$

est une région de confiance de niveau 0.95 pour  $(a, b)$ .

4. Montrer que

$$\frac{1}{2\hat{\sigma}^2} \left( \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right)^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \left( \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) \sim \mathcal{F}_{2, n-2}.$$

On a d'après la question précédente

$$\frac{1}{\sigma^2} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{1/2} \left( \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) \sim \mathcal{N}(0, I_2)$$

et donc

$$\left\| \frac{1}{\sigma^2} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{1/2} \left( \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) \sim \mathcal{N}(0, I_2) \right\|^2 = \left( \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right)^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \left( \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) \sim \chi_2^2$$

On peut donc écrire

$$\frac{1}{2\hat{\sigma}^2} \left( \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right)^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \left( \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right)$$

comme la fraction de deux chi deux indépendantes divisées par leurs degrés de liberté et on obtient donc le résultat.

5. En déduire une ellipse de confiance de niveau 95% pour le paramètre  $(a, b)$ .

On obtient donc l'ellipse

$$\mathcal{E} = \left\{ (a', b'), \frac{1}{2\hat{\sigma}^2} \left( \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \right)^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \left( \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \right) < k_{2, n-2, 1-\alpha} \right\}$$

où  $f_{2, n-2, 1-\alpha}$  est le quantile d'ordre  $1 - \alpha$  de la loi de Fisher de paramètres  $2, n - 2$ .

6. Donner un intervalle de confiance pour  $5a - 8b$ , de niveau 95%, lorsque  $n = 18$ . On pose  $B = (5, -8)$ , de sorte que  $B\beta = 5a - 8b$ . D'après le cours, on en déduit l'intervalle de confiance pour  $5a - 8b$  de niveau 95% :

$$\left[ (5\hat{a} - 8\hat{b}) - t_{16}(0.975) \sqrt{\left( \frac{25}{n} + \frac{64}{nv_t} \right) \hat{\sigma}^2}, (5\hat{a} - 8\hat{b}) + t_{16}(0.975) \sqrt{\left( \frac{25}{n} + \frac{64}{nv_t} \right) \hat{\sigma}^2} \right].$$

7. Tester l'hypothèse  $H_0 : "a = b"$  contre  $H_1 : "a \neq b"$  au niveau 1% lorsque  $n = 22$ .



$H_0$  s'écrit encore  $a - b = 0$ , et faire le test revient à vérifier que 0 appartient à l'intervalle de confiance de  $a - b$ . On pose donc  $B = (1, -1)$ , et on obtient (cours) l'IC

$$\left[ (\hat{a} - \hat{b}) - t_{16}(0.995) \sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{nv_t}\right) \hat{\sigma}^2}, (\hat{a} - \hat{b}) + t_{16}(0.995) \sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{nv_t}\right) \hat{\sigma}^2} \right].$$