Polytech — Année 2023/2024

L3 — Premier semestre

Feuille de TD 4 : Méthode de la puissance

Exercice 1 : On considère la matrice symétrique

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'objectif de cet exercice est d'appliquer la méthode de la puissance pour trouver la plus grande valeur propre (en valeur absolue) λ_1 de A. Pour cela, on se donne

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et on considère la méthode de la puissance donnée par

$$\begin{cases} x_k = \frac{Ax_{k-1}}{\|Ax_{k-1}\|_2} \\ \lambda^{(k)} = \langle x_k, Ax_k \rangle \end{cases}$$

1. Encadrer les valeurs propres de A en utilisant les disques de Gershgorin (cf TD 3).
2. Calculer les valeurs propres λ_1, λ_2 de A ainsi que les vecteurs propres (normalisés) associés v_1, v_2. Vérifier qu'ils sont bien orthogonaux.
3. Calculer α_1, α_2 tels que $x_0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$.
4. Calculer $A^k x_0$ en fonction de v_1, v_2, λ_1 et λ_2.
5. Montrer que pour tout k,
$$x_k = \frac{A^k x_0}{\|A^k x_0\|}.$$
6. En déduire une expression de x_k en fonction de $v_1, v_2, \lambda_1, \lambda_2$, puis calculer les limites de x_k et $\lambda^{(k)}$. Est-ce une surprise ?

Solution de l'exercice 1 :

1. On a pour toute valeur propre, $|\lambda - 1| \leq 3$.

2. On a $P(\lambda) = (\lambda-1)^2 - 9 = (\lambda-1+3)(\lambda-1-3) = (\lambda+2)(\lambda-4)$ et on a donc $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = -2$. De plus, on a pour tout $v = (x,y)^T$,

$$Av = \lambda_1 v \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = 4x \\ -3x + y = 4y \end{cases} \Leftrightarrow x = -y$$

On peut donc prendre comme vecteur propre normalisé

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De la même façon, on a

$$Av = \lambda_2 v \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = -2x \\ -3x + y = -2y \end{cases} \Leftrightarrow x = y$$

et on a

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et on vérifie facilement que ces vecteurs sont orthogonaux.

3. **Version 1.**

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_2 = 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}. \right.$$

Version 2.

$$\alpha_1 = \langle x_0, v_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{et} \qquad \alpha_2 = \langle x_0, v_2 \rangle \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

4. **Version 1 :** Comme v_1 et v_2 sont vecteurs propres de A, on a

$$Ax_0 = A\left(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2\right) = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2$$

et on a donc

$$\begin{aligned} A^k x_0 = A^{k-1}\left(\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2\right) &= A^{k-2}\left(\alpha_1 \lambda_1^2 v_1 + \alpha_2 \lambda_2^2 v_2\right) \\ &\vdots \\ &= \alpha_1 \lambda_1^k v_1 + \alpha_2 \lambda_2^k v_2 \end{aligned}$$

Version 2 : Soit $P = (v_1, v_2)$ la matrice de passage. Comme v_1 et v_2 forment une base orthonormée, on a $P^T = P^{-1}$. Ainsi on a

$$A = PDP^T \qquad \text{avec} \qquad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$A^k = PD^kP^T = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} P^T$$

et comme $Px_0P^T = (\alpha_1, \alpha_2)^T$,

$$A^k x_0 = PD^kP^TP \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} P^T = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k \alpha_1 \\ \lambda_2^k \alpha_2 \end{pmatrix} P^T = \alpha_1 \lambda_1^k v_1 + \alpha_2 \lambda_2^k v_2$$

5. On va montrer le résultat par récurrence. Il est vrai au rang 0, et on suppose qu'il est vrai au rang k. On a par hypothèse de récurrence

$$x_{k+1} = \frac{Ax_k}{\|Ax_k\|_2} = \frac{\frac{AA^kx_0}{\|A^kx_0\|_2}}{\frac{\|AA^kx_0\|_2}{\|A^kx_0\|_2}} = \frac{A^{k+1}x_0}{\|A^{k+1}x_0\|_2}.$$

6. On a

$$x_k = \frac{\alpha_1\lambda_1^k v_1 + \alpha_2 \lambda_2^k v_2}{\|\alpha_1\lambda_1^k v_1 + \alpha_2\lambda_2^k v_2\|_2} = \frac{\alpha_1\lambda_1^k v_1 + \alpha_2\lambda_2^k v_2}{\sqrt{\alpha_1^2 |\lambda_1|^{2k} + \alpha_2^2 |\lambda_2|^{2k}}} = \frac{\alpha_1 \left(\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}\right)^k v_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{|\lambda_1|}\right)^k v_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \left(\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}\right)^{2k}}}$$

Comme $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, $\left(\frac{\lambda_2}{|\lambda_1|}\right)^k$ et $\left(\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}\right)^k$ convergent vers 0. De plus, comme $\left(\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}\right)^k$ converge vers le signe de $\lambda_1 = 1$, on a

$$x_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \frac{\alpha_1 \operatorname{sign}(\lambda_1) v_1}{|\alpha_1|} = \operatorname{sign}(\lambda_1) v_1.$$

De plus, on a

$$\lambda^{(k)} = \langle x_k, Ax_k \rangle \xrightarrow[n \to +\infty]{} \langle \operatorname{sign}(\lambda_1) v_1, A\operatorname{sign}(\lambda_1) v_1 \rangle = \operatorname{sign}(\lambda_1)^2 \langle v_1, \lambda_1 v_1 \rangle = \lambda_1 \|v_1\|_2^2 = \lambda_1.$$

Ce n'est pas surprenant que la méthode converge car on a $\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|} = \frac{1}{2} < 1$ et $x_0 \notin \operatorname{vect}\{v_2\}$ (car $\alpha_1 \neq 0$).

Exercice 2 : Soit $\theta \in]0, \pi[$ et soit $M(\theta)$ la matrice de rotation

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les valeurs propres de $M(\theta)$.
2. Montrer que $M(\theta)^k = M(k\theta)$ pour tout $k \geq 1$.
3. Pour quel vecteur $x_0 \in \mathbb{R}^2$ la méthode de la puissance converge-t'elle ? (Indication :

considérer par exemple la suite $(\langle x_k, x_0 \rangle)_{k \geq 0})$

Solution de l'exercice 2 :

1. On a $P(\lambda) = (\cos\theta - \lambda)^2 + \sin^2\theta = \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta = \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1$. On a le discriminant $\Delta = 4\cos^2\theta - 4 = 4(\cos^2\theta - 1) = -4\sin^2\theta$. Comme sin est positif sur $]0, \pi[$, on obtient

$$\lambda_1 = \cos\theta + i\sin\theta \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = \cos\theta - i\sin\theta.$$

2. On montrer le résultat par récurrence. Pour $k = 1$ c'est clair. Supposons que ce soit vrai au rang k, on a alors

$$\begin{aligned} M(\theta)^{k+1} = M(\theta)M(\theta)^k &= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos k\theta - \sin\theta\sin k\theta & \cos\theta\sin k\theta - \sin\theta\cos k\theta \\ \sin\theta\cos k\theta + \cos\theta\sin k\theta & -\sin\theta\sin k\theta + \cos\theta\cos k\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(k+1)\theta & -\sin(k+1)\theta \\ \sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{pmatrix} \\ &= M((k+1)\theta). \end{aligned}$$

3. On a

$$\langle x_k, x_0 \rangle = \frac{\langle M^k x_0, x_0 \rangle}{\|M^k x_0\|_2}$$

Comme $M^k = M(k\theta)$ est une matrice de rotation, on a $\left\|M^k x_0\right\|_2 = \|x_0\|_2$. On a donc, comme $\langle u, v \rangle = \|u\|\|v\|\cos(\alpha)$ ou α est l'angle entre le vecteur u et v, et comme $M^k = M(k\theta)$ est la matrice de rotation d'angle $k\theta$,

$$\langle x_k, x_0 \rangle = \cos k\theta$$

et ce terme ne peut pas converger. Donc x_k ne peut pas converger. A noter que $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$, et on ne pouvait donc pas utiliser le théorème de convergence du cours.