Polytech | Année 2023/2024

L3 | Premier semestre

Feuille de TD 4 : Méthode de la puissance

Exercice 1 : On considère la matrice symétrique

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'objectif de cet exercice est d'appliquer la méthode de la puissance pour trouver la plus grande valeur propre (en valeur absolue) λ_1 de A. Pour cela, on se donne

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et on considère la méthode de la puissance donnée par

$$\begin{cases} x_k = \frac{Ax_{k-1}}{\|Ax_{k-1}\|_2} \\ \lambda^{(k)} = \langle x_k, Ax_k \rangle \end{cases}$$

1. Encadrer les valeurs propres de A en utilisant les disques de Gershgorin (cf TD 3).
2. Calculer les valeurs propres λ_1, λ_2 de A ainsi que les vecteurs propres (normalisés) associés v_1, v_2. Vérifier qu'ils sont bien orthogonaux.
3. Calculer α_1, α_2 tels que $x_0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$.
4. Calculer $A^k x_0$ en fonction de v_1, v_2, λ_1 et λ_2.
5. Montrer que pour tout k,
$$x_k = \frac{A^k x_0}{\|A^k x_0\|}.$$
6. En déduire une expression de x_k en fonction de $v_1, v_2, \lambda_1, \lambda_2$, puis calculer les limites de x_k et $\lambda^{(k)}$. Est-ce une surprise ?

Exercice 2 : Soit $\theta \in]0, \pi[$ et soit $M(\theta)$ la matrice de rotation

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les valeurs propres de $M(\theta)$.
2. Montrer que $M(\theta)^k = M(k\theta)$ pour tout $k \geq 1$.
3. Pour quel vecteur $x_0 \in \mathbb{R}^2$ la méthode de la puissance converge-t'elle ? (Indication : considérer par exemple la suite $(\langle x_k, x_0 \rangle)_{k \geq 0}$)