Sorbonne Université — Année 2025/2026

L3 — Deuxième semestre

Feuille de TD 4 : Tests

Exercice 1 – Loi uniforme.

On considère des variables aléatoires i.i.d $X_1, \dots, X_n$ suivant une loi uniforme sur $[0, \theta]$ avec $\theta > 0$. Soit $\theta_0 > 0$, l'objectif est de tester

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \quad \text{contre} \quad H_1 : \theta > \theta_0.$$

1. Soit $\alpha \in (0,1)$, construire un intervalle de confiance de la forme $[X_{(n)}; X_{(n)}c_\alpha]$ pour le paramètre θ.
2. En déduire un test de niveau α et donner sa taille.
3. Construire un test de taille α et calculer la p-valeur associée à une réalisation $x_{(n)}$.

Exercice 2 – Loi exponentielle translatée.

Soit $Y \sim \mathcal{E}$ et $X = Y + \theta$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. On considère des variables aléatoires i.i.d $X_1, \dots, X_n$ de même loi que X et $\theta_0 \in \mathbb{R}$. L'objectif est de tester

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \quad \text{contre} \quad H_1 : \theta > \theta_0.$$

1. Montrer que $n\left(X_{(1)} - \theta\right) \sim \mathcal{E}(1)$.
2. Soit $\alpha \in (0,1)$, construire un intervalle de confiance de la forme $[X_{(1)} - c_\alpha; X_{(1)}]$ pour le paramètre θ.
3. En déduire un test de niveau α et donner sa taille.
4. Construire un test de taille α et calculer la p-valeur associée à une réalisation $x_{(1)}$.

Exercice 3 – Test d'adéquation.

Dans les années 70, les athlètes féminines de RDA étaient réputées pour leur forte corpulence et soupçonnées par le comité éthique olympique de dopages via la prise de substances hormonales virilisantes (dites androgènes). Des mesures ont été effectuées sur la quantité d'androgènes par litre de sang chez 9 athlètes, et on obtient les résultats suivants :

$$3.22 \quad 3.07 \quad 3.17 \quad 2.91 \quad 3.40 \quad 3.58 \quad 3.23 \quad 3.11 \quad 3.62$$

On veut tester si les athlètes de RDA sont dopées, sachant que chez une femme "lambda", le quantité moyenne d'androgènes est de 3.1. Plus précisément, on considère que les données sont des réalisations de variables aléatoires i.i.d avec $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2$ et on veut tester

$$H_0 : \mu \leq 3.1 \quad \text{contre} \quad H_1 : \mu > 3.1$$

1. Rappeler la loi de $\overline{X}_n$ et $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2$.
2. En déduire la loi de
$$Z = \sqrt{n} \frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n}.$$
3. En déduire un test de taille α.
4. Soit $\overline{x}_n$ et s_n des réalisation de $\overline{X}_n$ et S_n. Calculer la p-valeur associée.
5. Sachant $\overline{x}_9 = 3.26$, $s_n = 0.235$ et que $\mathbb{P}\left[T_{n-1} \geq 3 \times (3.26 - 3.1)/0.235\right] = 0.038$, que pouvez-vous en conclure.
6. Pourquoi peut-on remettre en question le protocole expérimental et donc la conclusion du test ?

Exercice 4 – Test de Student.

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_p$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et soient $Y_1, Y_2, \ldots, Y_q$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. On suppose que les deux échantillons sont indépendants et de même variance, c'est à dire que $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$.

On s'intéresse à l'estimation de la différence $\mu_1 - \mu_2$.

1. Proposer un estimateur de $\mu_1 - \mu_2$. On le notera D.
2. Etablir la loi de cet estimateur.
3. Proposer un estimateur de σ^2. On le notera S^2 et démontrer que $\frac{(p+q-2)S^2}{\sigma^2}$ suit une loi du Khi-deux à $(p+q-2)$ ddl et S^2 indépendant de $\overline{X}_p$ et $\overline{Y}_q$.
4. Etablir alors que
$$\frac{D - (\mu_1 - \mu_2)}{S\sqrt{\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}}} \sim T_{p+q-2}$$
5. Construire un intervalle de confiance pour la différence $(\mu_1 - \mu_2)$ au niveau de confiance $(1 - \alpha)$ avec $\alpha \in]0, 1[$.
6. Proposer un test pour tester
$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad \text{contre} \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2.$$

Exercice 5 – Loi de Poisson.

On considère des variables aléatoires i.i.d $X_1, \ldots, X_n$ suivant une loi uniforme de paramètre $\lambda \in (0,1]$.

1. Soit $\alpha \in (0,1)$. Construire un intervalle de confiance de niveau au moins $1-\alpha$ pour λ.
2. Soit $\lambda_0 \in (0,1]$. En déduire un test pour tester
$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \quad \text{contre} \quad \lambda \neq \lambda_0.$$
3. Construire un intervalle de confiance asymptotique de λ. En déduire un test asymptotique.

Exercice 6 – Test du rapport de vraisemblance.

Definition 0.1 (Test du rapport de vraisemblance)**.** *Soit $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon et on suppose que X_1 admet une densité f_θ avec $\theta \in \Theta$. Soit $\theta_0, \theta_1 \in \Theta$, on souhaite tester*
$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \textit{contre} \quad H_1 : \theta = \theta_1.$$
On considère le rapport de vraisemblance
$$T = \frac{L_{\mathbf{X}}(\theta_0)}{L_{\mathbf{X}}(\theta_1)} = \frac{\prod_{i=1}^n f_{\theta_0}(X_i)}{\prod_{i=1}^n f_{\theta_1}(X_i)}.$$
Le test (de niveau α) de rapport de vraisemblance consiste à construire une zone de rejet de la forme
$$ZR = \left\{ \frac{\prod_{i=1}^n f_{\theta_0}(X_i)}{\prod_{i=1}^n f_{\theta_1}(X_i)} > c_\alpha \right\} \quad \textit{avec} \quad \mathbb{P}_{\theta_0}\left[\frac{\prod_{i=1}^n f_{\theta_0}(X_i)}{\prod_{i=1}^n f_{\theta_1}(X_i)} > c_\alpha \right] = \alpha.$$

Construire un test du rapport de vraisemblance de niveau α dans les cas suivant :

1. Loi exponentielle : X_1 suit une loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$, et $\theta_0 < \theta_1$ (on admettra que $n\overline{X}_n$ suit une loi γ de paramètre n, θ, notée $\gamma(n,\theta)$, dont on connait les quantiles).
2. Loi normale : $X_1 \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$, $\theta_0 = 0$ et $\theta_1 > 0$.

Exercice 7.

On considère des variables aléatoires i.i.d $X_1, \ldots, X_n$ suivant une loi de Weibull de paramètre $\theta > 0$, i.e admettant pour densité
$$f_\theta(x) = \frac{2x}{\theta} \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right) \mathbf{1}_{x \geq 0}.$$

1. Donner l'estimateur du maximum de vraisemblance.

2. Montrer que la variable aléatoire $Y = \frac{2X^2}{\theta} \sim \mathcal{E}(1/2)$. On remarquera que $\mathcal{E}(1/2) \sim \chi_2^2$.
3. En déduire un intervalle de confiance de niveau $\alpha \in (0, 1)$ du paramètre θ.
4. Soit $\theta_0 > 0$, construire un test de niveau α pour tester

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{contre} \quad H_1 : \theta \neq \theta_0.$$

5. On considère maintenant $0 < \theta_0 < \theta_1$. Construire un test de rapport de vraisemblance de niveau α pour tester

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{contre} \quad H_1 : \theta = \theta_1.$$