Polytech Année 2023/2024

L3 Premier semestre

Feuille de TD 3 : Méthodes itératives (suite)

Exercice 1 : On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. L'objectif de cet exercice est de montrer que si A est à diagonale strictement dominante, i.e

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad |a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|,$$

alors les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel convergent.

1. On commence par démontrer le Lemme d'Hadamard-Gerschgörin suivant :

   Lemma 0.1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors ses valeurs propres sont situées dans les disque de Gerschgörin définis pour tout $i = 1, \dots, n$ par*

   $$D_i = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \right\}.$$

   (a) Soit $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ un vecteur propre (non nul) associé à une valeur propre λ. Traduire cela pour chacune des coordonnées de x.

   (b) Considérer k tel que $|x_k| = \max_i \{|x_i|\}$ et finir la preuve du lemme.

2. En déduire que tout matrice à diagonale strictement dominante est inversible.

3. Conclure :

   (a) Pour la méthode de Jacobi.

   (b) Pour la méthode de Gauss-Seidel.

4. En déduire la convergence (ou non) des méthodes de Jacobi et de Gauss Seidel lorsque A vérifie

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solution de l'exercice 1 :

1. Preuve du Lemme d'Hadamard-Gerschgörin :
   (a) Comme $Ax = \lambda x$, pour tout i, on a

   $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \lambda x_i \Leftrightarrow (\lambda - a_{ii})\, x_i = \sum_{i \neq j} x_{ij}.$$

   (b) En particulier, en passant à au module et pour $i = k$, on a

   $$|\lambda - a_{kk}|\, |x_k| = \left| \sum_{k \neq j} a_{kj}x_j \right| \leq \sum_{k \neq j} |a_{kj}|\, |x_j| \leq |x_k| \sum_{j \neq k} |a_{kj}| \Leftrightarrow |\lambda - a_{kk}| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}|$$

   En d'autres termes, $\lambda \in D_k$, ce qui conclut la preuve.

2. On suppose par l'absurde que A n'est pas inversible, et donc que 0 est valeur propre. Par le lemme précédent, il existe i tel que

   $$|0 - a_{ii}| = |a_{ii}| \leq \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$$

   ce qui est contradictoire avec le fait que A soit à diagonale dominante. On a donc une contradiction, et A est donc bien inversible.

3. Dans chacun des cas, on a $x_{k+1} = Bx_k + c$ avec $B = J = D^{-1}(E + F)$ et $B = (D - E)^{-1}F$. Dans chacun des cas, l'objectif est de montrer que toute valeur propre λ de B est de module strictement inférieur à 1.
   (a) Comme $B = J = D^{-1}(E + F)$, pour tout i, j on a

   $$J_{ij} = \begin{cases} -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

   Si λ est valeur propre de J, par le lemme, on a qu'il existe un indice i tel que

   $$|\lambda - J_{ii}| = |\lambda| \leq \sum_{j, j \neq i} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} \leq \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j, j \neq i} |a_{ij}| < 1,$$

   la dernière inégalité venant du fait que A soit à diagonale strictement dominante.

   (b) Soit λ une valeur propre de B, on a alors pour tout vecteur propre x associé

   $$Bx = (D - E)^{-1}Fx = \lambda x \Longrightarrow Fx = \lambda(D - E)Fx \Longrightarrow \forall i, -\sum_{j > i} a_{ij}x_j = \lambda \sum_{j \leq i} a_{ij}x_j$$

   Soit k l'indice tel que $|x_k| = \max_i |x_i|$, en prenant $i = k$, on obtient

   $$-\sum_{j > k} a_{kj}x_j = \lambda \sum_{j \leq k} a_{kj}x_j \Leftrightarrow -\lambda a_{kk}x_k = \lambda \sum_{j < k} a_{kj}x_j + \sum_{j > k} a_{kj}x_j$$

On obtient donc, en passant au module et par définition de x_k,

$$|\lambda|\,|a_{kk}|\,|x_k| \leq |\lambda| \sum_{j<k} |a_{kj}|\,|x_j| + \sum_{j>k} |a_{kj}|\,|x_j| \leq \left(|\lambda| \sum_{j<k} |a_{kj}| + \sum_{j>k} |a_{kj}| \right) |x_k|$$

Si $\lambda = 0$ alors $|\lambda| < 1$. Si $\lambda \neq 0$, comme A est à diagonale strictement dominante,

$$|\lambda| \sum_{j\neq k} |a_{kj}| < |\lambda|\,|a_{kk}| \leq |\lambda| \sum_{j<k} |a_{kj}| + \sum_{j>k} |a_{kj}|$$

ce qui revient à

$$|\lambda| \sum_{j>k} |a_{kj}| < \sum_{j>k} |a_{kj}|$$

ce qui n'est vérifié que si $|\lambda| < 1$.

4. La matrice est clairement à diagonale strictement dominante et les méthodes convergent donc.