Polytech — Année 2023/2024

L3 — Premier semestre

Feuille de TD 3 : Méthodes itératives (suite)

Exercice 1 : On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. L'objectif de cet exercice est de montrer que si A est à diagonale strictement dominante, i.e

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad |a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|,$$

alors les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel convergent.

1. On commence par démontrer le Lemme d'Hadamard-Gerschgörin suivant :

   Lemma 0.1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors ses valeurs propres sont situées dans les disque de Gerschgörin définis pour tout $i = 1, \dots, n$ par*

   $$D_i = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \right\}.$$

   (a) Soit $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ un vecteur propre (non nul) associé à une valeur propre λ. Traduire cela pour chacune des coordonnées de x.

   (b) Considérer k tel que $|x_k| = \max_i \{|x_i|\}$ et finir la preuve du lemme.

2. En déduire que tout matrice à diagonale strictement dominante est inversible.

3. Conclure :

   (a) Pour la méthode de Jacobi.

   (b) Pour la méthode de Gauss-Seidel.

4. En déduire la convergence (ou non) des méthodes de Jacobi et de Gauss Seidel lorsque A vérifie

   $$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$