Sorbonne Université — Année 2023/2024

M2 Probabilités et finance, Probabilités et Modèles aléatoires — Premier semestre

Feuille de TD 2
Correction

Exercice 1 : (loi de Poisson) Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d suivant une loi de Poisson de paramètre λ et

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \quad \text{et} \quad S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2$$

1. Montrer que $\overline{X}_n$ est un estimateur sans biais et asymptotiqyuement normal de λ.
   Clair.
2. Montrer que S_n^2 est un estimateur sans biais de λ et montrer sa normalité asymptotique. On rappelle que $\mathbb{E}\left[(X_1-\lambda)^4\right] = \lambda + 3\lambda^2$.
   On a

$$\begin{aligned}
(n-1)S_n^2 &= \sum_{i=1}^n \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \sum_{i=1}^n \left((X_i-\lambda) + \left(\lambda - \overline{X}_i\right)\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^n (X_i-\lambda)^2 + 2\sum_{i=1}^n (X_i-\lambda)\left(\lambda-\overline{X}_n\right) + \sum_{i=1}^n \left(\lambda-\overline{X}_n\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^n (X_i-\lambda)^2 + 2\left(\lambda-\overline{X}_n\right)\sum_{i=1}^n (X_i-\lambda) + n\left(\overline{X}_n-\lambda\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^n (X_i-\lambda)^2 + 2n\left(\lambda-\overline{X}_n\right)\left(\overline{X}_n-\lambda\right) + n\left(\overline{X}_n-\lambda\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^n (X_i-\lambda)^2 - n\left(\overline{X}_n-\lambda\right)^2
\end{aligned}$$

   On a donc

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i-\lambda)^2 - \frac{n}{n-1}\left(\overline{X}_n-\lambda\right)^2$$

   Donc

$$\mathbb{E}\left[S_n^2\right] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[(X_i-\lambda)^2\right] - \frac{n}{n-1}\mathbb{E}\left[\left(\overline{X}_n-\lambda\right)^2\right] = \frac{n}{n-1}\lambda - \frac{1}{n-1}\lambda = \lambda$$

Pour la normalité asymptotique, on a

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\lambda\right)^2-\lambda\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}}\mathcal{N}\left(0,\lambda+2\lambda^2\right)\quad \text{et}\quad \sqrt{n}\left(\overline{X}_n-\mu\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}}\mathcal{N}\left(0,\lambda\right)$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\sqrt{n}\left(S_n^2-\lambda\right) &= \sqrt{n}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\lambda\right)^2-\lambda-\frac{n}{n-1}\left(\overline{X}_n-\lambda\right)^2\right)\\
&= \sqrt{n}\left(\frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\lambda\right)^2-\lambda\right)-\frac{1}{n-1}\lambda-\frac{n}{n-1}\left(\overline{X}_n-\lambda\right)^2\right)\\
&= \frac{n}{n-1}\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\lambda\right)^2-\lambda\right)-\frac{\sqrt{n}}{n-1}\lambda-\frac{n}{n-1}\sqrt{n}\left(\overline{X}_n-\lambda\right)^2
\end{aligned}$$

Par Slutsky, comme $\frac{n}{n-1}$ converge vers 1,

$$\frac{n}{n-1}\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\lambda\right)^2-\lambda\right)\xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}}\mathcal{N}\left(0,\lambda+2\lambda^2\right).$$

De plus, $\frac{\sqrt{n}}{n-1}\lambda$ converge vers 0. Enfin, on a

$$\frac{n}{n-1}\sqrt{n}\left(\overline{X}_n-\lambda\right)^2=\frac{n}{n-1}\left(\overline{X}_n-\lambda\right)\sqrt{n}\left(\overline{X}_n-\lambda\right)$$

avec

$$\frac{n}{n-1}\to 0\quad\text{et}\quad\left(\overline{X}_n-\lambda\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}}0\quad\text{et}\quad\sqrt{n}\left(\overline{X}_n-\lambda\right)\xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}}\mathcal{N}(0,\lambda).$$

En appliquant Slutsky, on a donc

$$\frac{n}{n-1}\sqrt{n}\left(\overline{X}_n-\lambda\right)^2\xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}}0.$$

En appliquant Slutsky, on obtient donc

$$\sqrt{n}\left(S_n^2-\lambda\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}}\mathcal{N}\left(0,\lambda+2\lambda^2\right)$$

3. Quel estimateur privilégier ? S_n^2 a une plus grande variance asymptotique et on choisit donc $\overline{X}_n$.
4. Montrer que
   (a) $\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n-\lambda}{\sqrt{\overline{X}_n}}\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}}\mathcal{N}(0,1)$
   (b) $\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n-\lambda}{S_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}}\mathcal{N}(0,1)$
   (c) $\sqrt{n}\left(g\left(\overline{X}_n\right)-g(\lambda)\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}}\mathcal{N}(0,1)$ pour un bon choix de g.

Pour les deux premiers, c'est une application direct de Slutsky, en remarquant que

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \lambda}{\sqrt{\overline{X}_n}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\overline{X}_n}}\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \lambda}{S_n} = \frac{\sqrt{\lambda}}{S_n}\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$$

Pour le le troisième, on choisit g tel que $g'(\lambda)^2 = \lambda$, i.e on prend $g = 2\sqrt{\lambda}$ et on obtient

$$\sqrt{n}\left(2\sqrt{\overline{X}_n} - 2\sqrt{\lambda}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

5. Déterminer les intervalles de confiance correspondant, lequel est le meilleur ? On obtient les 3 intervalles suivants :

$$\left[\overline{X}_n \pm q_{1-\alpha/2}\frac{\sqrt{\overline{X}_n}}{\sqrt{n}}\right]; \quad \left[\overline{X}_n \pm q_{1-\alpha/2}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right]; \quad \left[\left(\sqrt{\overline{X}_n} - q_{1-\alpha/2}\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^2; \left(\sqrt{\overline{X}_n} + q_{1-\alpha/2}\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^2\right]$$

Ces trois intervalles sont asymptotiquement équivalents. En effet, si on on note L_1, L_2, L_3 leurs longueurs respectives, on a

$$L_1 = L_3 = 2q_{1-\alpha/2}\frac{\sqrt{\overline{X}_n}}{\sqrt{n}} \qquad \text{et} \qquad L_2 = 2q_{1-\alpha/2}\frac{S_n}{\sqrt{n}}$$

et on a

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{\sqrt{\overline{X}_n}}{S_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} = 1.$$

Soit $\lambda_0 > 0$. En déduire un test de niveau α pour tester

$$H0 : "\lambda = \lambda_0" \qquad \text{contre} \qquad H1 : "\lambda \neq \lambda_0".$$

On peut prendre n'importe lequel des intervalles précédents et rejetter H0 si λ_0 n'est pas dans la réalisation de l'intervalle.

Exercice 2 : Soit $X_1, \dots, X_n$ un échantillon de loi uniforme sur $[0, \theta]$.

1. Le modèle est-il régulier ? Soit $x > 0$, la fonction $\theta \longmapsto \frac{1}{\theta}\mathbf{1}_{[0,\theta]}(x) = \frac{1}{\theta}\mathbf{1}_{[x,+\infty[}(\theta)$ est discontinue en x et le modèle n'est donc pas régulier.

2. Par la méthode des moments, proposer un estimateur de θ. Montrer sa consistance et sa normalité asymptotique. En déduire un intervalle de confiance asymptotique de niveau $1-\alpha$.

   On a $\mathbb{E}[X] = \theta/2$ et $\mathbb{V}[X] = \theta^2/12$, et on a donc l'estimateur $\hat{\theta}_n = 2\overline{X}_n$. On a la consistance via la LFGN et le théorème de continuité, et comme

$$\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \theta/2\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\theta^2}{12}\right)$$

En multipliant par 2, on obtient

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\theta^2}{3}\right).$$

Intervalle de confiance, version 1 : De plus, par Slutsky, on a

$$\sqrt{3n}\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\hat{\theta}_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

et on obtient donc l'intervalle de confiance

$$\left[\hat{\theta}_n \pm q_{1-\alpha}\frac{\hat{\theta}_n}{\sqrt{3n}}\right]$$

où $q_{1-\alpha}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi normale centrée réduite.
Intervalle de confiance version 2 : En divisant par $\theta/\sqrt{3}$ le TLC, on obtient

$$\sqrt{3n}\left(\frac{\hat{\theta}_n}{\theta} - 1\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

et donc

$$\mathbb{P}\left[\left|\sqrt{3n}\left(\frac{\hat{\theta}_n}{\theta} - 1\right)\right| \leq q_{1-\alpha}\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1-\alpha.$$

On obtient donc l'intervalle (pour $n > q_{1-\alpha}^2$)

$$\left[\frac{\hat{\theta}_n}{1+\frac{q_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}}; \frac{\hat{\theta}_n}{1-\frac{q_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}}\right]$$

3. Soit $\theta_0 > 0$, proposer un test de niveau asymptotique α pour tester

$$H0 : \theta = \theta_0 \qquad \text{contre} \qquad H_1 : \theta \neq \theta_0.$$

On a la zone de rejet

$$ZR = \left\{\left|\sqrt{3n}\frac{\hat{\theta}_n - \theta_0}{\hat{\theta}_n}\right| > q_{1-\alpha}\right\} = \left\{\theta_0 \notin \left[\hat{\theta}_n \pm q_{1-\alpha}\frac{\hat{\theta}_n}{\sqrt{3n}}\right]\right\}.$$

4. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance et calculer son risque quadratique

On a pour tout $\theta > 0$,

$$L_{\mathbf{X}}(\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta}\mathbf{1}_{[0,\theta]}(X_1) = \frac{1}{\theta^n}\prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{[X_i,+\infty[}(\theta) = \frac{1}{\theta^n}\mathbf{1}_{[X_{(n)},+\infty[}(\theta).$$

et le maximum est donc atteint en $X_{(n)}$.

5. Calculer la loi limite de $n\left(\theta_n^{MV}-\theta\right)$. Pour tout $x \in [0, n\theta]$, on a par indépendance des X_i

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[n\left(\theta - X_{(n)}\right) \geq x\right] &= \mathbb{P}\left[X_{(n)} \leq \theta - \frac{x}{n}\right] = \mathbb{P}\left[\forall i, X_i \leq \theta - \frac{x}{n}\right] \\ &= \left(\mathbb{P}\left[X_1 \leq \theta - \frac{x}{n}\right]\right)^n = \left(1 - \frac{x}{\theta n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right).\end{aligned}$$

et donc $n\left(\theta - X_{(n)}\right)$ converge en loi vers une loi exponentielle de paramètre θ^{-1}.

6. Déterminer $c_{\alpha,n}$ tel que $\left[X_{(n)}, c_{\alpha,n}X_{(n)}\right]$ soit un intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$.

On a

$$\mathbb{P}\left[\theta \leq c_{\alpha,n}X_{(n)}\right] = 1 - \mathbb{P}\left[X_{(n)} \leq \frac{\theta}{c_{\alpha,n}}\right] = 1 - \left(\mathbb{P}\left[X_1 \leq \frac{\theta}{c_{\alpha,n}}\right]\right)^n = 1 - \frac{1}{c_{\alpha,n}^n}$$

De plus,

$$\frac{1}{c_{\alpha,n}^n} = \alpha \Leftrightarrow c_{\alpha,n} = \frac{1}{\alpha^{1/n}} = \exp\left(-\frac{1}{n}\ln(\alpha)\right).$$

7. Calculer la médiane de X_1 et en déduire un nouvel estimateur de θ. Donner sa normalité asymptotique ainsi qu'un nouvel intervalle de confiance asymptotique.

On a $x_{1/2} = \theta/2$ et on propose donc l'estimateur $2X_{([n/2])}$. On a la convergence de $X_{([n/2])}$ via le théorème du cours et donc la consistance de $2X_{([n/2])}$. On a de plus

$$\sqrt{n}\left(X_{([n/2])} - \theta/2\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\theta^2}{4}\right)$$

et on obtient en multipliant par 2 la normalité asymptotique. On obtient les intervalles de confiances comme pour l'estimateur des moments.

8. Quel intervalle choisiriez vous ? Non seulement celui obtenu avec le maximum de vraisemblance est plus précis quand n est grand (faire un DL pour le vérifier), mais en plus il est non asymptotique.

Exercice 3 : (Loi de Pareto) Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d de densité de Pareto

$$f_\theta(x) = \frac{\theta}{x^{\theta+1}}\mathbf{1}_{x\geq 1}.$$

avec $\theta > 0$.

1. On suppose $\theta > 1$, estimer θ par la méthode des moments. A-t-on consistance ? normalité asymptotique ?

On a

$$\mathbb{E}[X] = \int_1^\infty \frac{\theta}{x^\theta}dx = \frac{\theta}{\theta - 1}$$

On a donc $\theta = 1 + \frac{1}{\mathbb{E}[X_1]-1}$, et on obtient la consistance via la LFGN et le théorème de continuité. Sans garantie sur le fait que θ soit strictement supérieure à 2, on ne peut pas avoir la normalité asymptotique.

2. Que se passe-t-il si $\theta \in (0,1)$?

   On ne peut pas passer par $\mathbb{E}[X]$ qui n'est pas défini. Par contre on peut regarder, pour $a > 0$,

$$\mathbb{E}\left[X^{-a}\right] = \int_1^{+\infty} \frac{\theta}{x^{\theta+1+a}} dx = \frac{\theta}{\theta+a}$$

   et a donc $\theta = \frac{a}{1-\mathbb{E}[X^{-a}]} - a$. De plus, on a $\mathbb{E}\left[X^{-2a}\right] < +\infty$ et on peut ainsi avoir la normalité asymptotique.

3. Calculer la médiane de X et en déduire un nouvel estimateur de θ, pour tout $\theta > 0$. Donner sa normalité asymptotique.

   On a $F(x) = 1 - x^{-\theta}$, et on obtient donc $x_{1/2} = 2^{1/\theta}$. On obtient donc l'estimateur $\hat{\theta}_n = \frac{\ln 2}{\ln\left(X_{([n/2])}\right)}$. De plus, comme $f(x_{1/2}) = \frac{\theta}{2^{\frac{\theta+1}{\theta}}} > 0$, on a

$$\sqrt{n}\left(X_{([n/2])} - x_{1/2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{2^{\frac{2}{\theta}}}{\theta^2}\right)$$

   Soit $g : x \longmapsto \frac{\ln 2}{\ln x}$, g est dérivable en $x_{1/2}$ et $g'(x_{1/2}) = -\frac{\theta^2}{2^{1/\theta}}$, on obtient

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\theta^2}{(\ln 2)^2}\right)$$

4. Donner l'estimateur du maximum de vraisemblance pour $\theta > 0$. Est-il asymptotiquement normal ?

   On a pour tout $\theta > 0$,

$$L_{\mathbf{X}}(\theta) = \theta^n \prod_{i=1}^n \frac{1}{X_i^{\theta+1}}$$

   et donc

$$l_{\mathbf{X}}(\theta) = n\ln(\theta) - (\theta+1)\sum_{i=1}^n \ln(X_i)$$

   et

$$l'_{\mathbf{X}}(\theta) = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^n \ln(X_i) = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{n}{\sum_{i=1} \ln(X_i)}$$

   on obtient donc $\hat{\theta}_n = \frac{n}{\sum_{i=1}\ln(X_i)}$ et on a l'unicité en dressant le tableau de variation. De plus,

$$\mathbb{E}[\ln(X)] = \int_1^{+\infty} \frac{\theta \ln(x)}{x^{\theta+1}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\theta+1}} dx = \frac{1}{\theta}.$$

De même,

$$\mathbb{E}\left[(\ln x)^2\right] = \int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^2\theta}{x^{\theta+1}} dx = \int_1^{\infty} \frac{2\ln x}{x^{\theta+1}} dx = \frac{2}{\theta^2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}\left[\ln X\right] = \frac{1}{\theta^2}.$$

Ainsi,

$$\sqrt{n}\left(\left(\hat{\theta}_n^{MV}\right)^{-1} - \theta^{-1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\theta^2}\right),$$

et donc comme $g : x \longmapsto x^{-1}$ est dérivable en θ^{-1} et $g'(\theta) = -\theta^2$, on a

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n^{MV} - \theta\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \theta^2\right).$$

5. Le modèle est-il régulier ? L'estimateur du maximum de vraisemblance est-il asymptotiquement efficace ?

   Soit $x > 1$, l'application $\theta \longmapsto \theta x^{-\theta-1} = \theta \exp\left(-(\theta+1)\ln(x)\right)$ est de classe C^∞ et

   $$I(\theta) = \mathbb{V}\left[l'_\theta(X)\right] = \mathbb{V}\left[\ln(X)\right] = \theta^{-2}$$

   qui est continue et le modèle est donc régulier et l'estimateur du maximum de vraisemblance est asymptotiquement efficace.

Exercice 4 : lois translatées

1. Comme f est de classe C^1 et comme

   $$f'_\theta(x) = -f'(x-\theta)$$

   on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ que $f_\theta(x)$ est de classe C^1. De plus, on a, à l'aide d'un changement de variable,

   $$\begin{aligned} I(\theta) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\left(f'_\theta(x)\right)^2}{f_\theta(x)} \mathbf{1}_{f_\theta(x)>0} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\left(f'(x-\theta)\right)^2}{f(x-\theta)} \mathbf{1}_{f(x-\theta)>0} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\left(f'(x)\right)^2}{f(x)} \mathbf{1}_{f(x)>0} dx \\ &= I \end{aligned}$$

2. Etudions les différents cas.

   (a) Il s'agit du modèle $\mathcal{N}(\theta, 1)$, qui est un modèle de translation de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ de densité $f(y) = \exp(-y^2/2)/(2\pi)^{1/2}$. Les conditions de régularité sont vérifiées puisque f est

C^1 sur $\mathbb{R}$. De plus, en notant Y une variable gaussienne centrée réduite, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{f'(y)^2}{f(y)} \mathbf{1}_{f(y)>0}\, dy = \int_{\mathbb{R}} y^2 \exp(-y^2/2)/(2\pi)^{1/2}\, dy = \mathbb{E}Y^2 = 1 < +\infty.$$

L'information de Fisher est donc $I(\theta) = 1$.

(b) Quel que soit $x > 0$ fixé, la fonction $\theta \mapsto f_\theta(x) = \theta^{-1}\mathbf{1}_{[x,+\infty[}(\theta)$ est discontinue en $\theta = x$, donc le modèle n'est pas régulier.

(c) Il s'agit du modèle de translation de densité $f(y) = c_1(1-y^2)\mathbf{1}_{[-1,1]}(y)$. On a

$$\int_{-1}^{1} (1-y^2)dy = 2 - 2/3 = 4/3 \implies c_1 = 3/4.$$

Clairement,

$$f(y) = (3/4)(1-y^2)\mathbf{1}_{y\in[-1,1]}$$

est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$. La dérivée de f est presque partout donnée par $f'(y) = -(3/2)y\mathbf{1}_{y\in[-1,1]}$ donc $(f'(y))^2/f(y)$ vaut, à constante multiplicative près, $y^2/(1-y^2)\mathbf{1}_{y\in[-1,1]}$. Comme $y \mapsto (1-y)^{-1}$ n'est pas intégrable au voisinage de 1, le modèle n'est pas régulier.

(d) On a encore un modèle de translation et cette fois

$$\int_{-1}^{1} (1-y^2)^2 dy = 2\int_{0}^{1} (1-2y^2+y^4)dy = 16/15 \implies c_2 = 15/16.$$

Clairement, $f(y) = c_2(1-y^2)^2\mathbf{1}_{y\in[-1,1]}$ est C^1 sur $\mathbb{R}$: noter qu'il n'y a pas de problème en ± 1 puisque $f'(y) = 2c_2(-2y)(1-y^2)\mathbf{1}_{y\in[-1,1]}$. Donc $(f'(y))^2/f(y)$ vaut, à constante multiplicative près, $y^2(1-y^2)^2/(1-y^2)^2\mathbf{1}_{y\in[-1,1]} = y^2\mathbf{1}_{y\in[-1,1]}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$. Le modèle est régulier et l'information de Fisher vaut

$$I(\theta) = 16c_2 \int_{-1}^{1} y^2 dy = 16c_2 2/3 = 10.$$

Exercice 5 : (Loi exponentielle translatée) On observe un échantillon $X_1, \dots, X_n$ dont la loi admet la densité

$$f_\theta(x) = \exp(-(x-\theta))\mathbf{1}_{[\theta,+\infty[}(x),$$

où θ est un paramètre réel inconnu.

1. Rappeler la loi de $n(X_{(1)} - \theta)$. En déduire un intervalle de confiance pour θ de niveau $1-\alpha$.

   $n(\hat\theta_n - \theta)$ suit une loi exponentielle de paramètre 1. On cherche donc $c > 0$ tel que

$$\mathbb{P}_\theta[\hat\theta_n - c \le \theta \le \hat\theta_n] = 1 - \alpha.$$

On a, d'après ce qui précède :

$$\mathbb{P}_\theta[\hat{\theta}_n - c \leq \theta \leq \hat{\theta}_n] = \mathbb{P}_\theta[\hat{\theta}_n - c \leq \theta] = 1 - \mathbb{P}_\theta[n(\hat{\theta}_n - \theta) \geq nc] = 1 - e^{-nc} = 1 - \alpha$$

si on choisit $c = -(\log \alpha)/n$. Donc

$$I_{1-\alpha} = \left[\hat{\theta}_n + \frac{\log \alpha}{n}, \hat{\theta}_n\right]$$

est un intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$.

2. Soit $\alpha \in]0, 1[$. On souhaite tester au niveau α

$$H_0 : \theta \geq 0 \text{ contre } H_1 : \theta < 0.$$

   (a) Construire un test à partir de l'intervalle de confiance de la question 2, calculer sa puissance et donner son allure (pour n et α fixés). Quelle est sa taille $\alpha^\star$?

   On rejette H_0 si $I_{1-\alpha} \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset$: d'après le cours, ceci fournit un test de **niveau** $(1 - \alpha)$. La puissance du test est donnée pour tout θ par

$$\begin{aligned}
\pi(\theta) &= \mathbb{P}_\theta(\text{on rejette } H_0) = \mathbb{P}_\theta(\hat{\theta}_n < 0) = \mathbb{P}_\theta(X_{(1)} < 0) \\
&= \mathbb{P}(Y_{(1)} < -\theta) = 1 - \mathbb{P}(Y_{(1)} \geq -\theta) = 1 - \mathbb{P}(Y_1 \geq -\theta)^n \\
&= \begin{cases} 1 - e^{n\theta} & \text{si } \theta \leq 0 \\ 0 & \text{si } \theta \geq 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

   En particulier, on remarque que le test est de taille 0, il est donc bien de niveau α, mais cette situation ne semble pas idéale : on s'attend plutôt à $\pi(0) = 0.05$ si le test était de taille 0.05. C'est l'objet de la suite.

   (b) Proposer un autre test qui soit, lui, de taille α.

   Un test logique consiste à rejeter H_0 si $\hat{\theta}_n < c_\alpha$ tel que

$$\sup_{\theta \geq 0} \{\mathbb{P}_\theta(\hat{\theta}_n < c_\alpha)\} = \alpha.$$

   On cherche donc à déterminer c_α. Or, en se souvenant que la variable aléatoire $E = n(\hat{\theta}_n - \theta)$ suit une loi exponentielle de paramètre 1, on a

$$\begin{aligned}
\sup_{\theta \geq 0} \mathbb{P}_\theta(\hat{\theta}_n < c_\alpha) &= \sup_{\theta \geq 0} \mathbb{P}_\theta(n(\hat{\theta}_n - \theta) < n(c_\alpha - \theta)) \\
&= \sup_{\theta \geq 0} \mathbb{P}(E < n(c_\alpha - \theta)) \\
&= \mathbb{P}(E < nc_\alpha)
\end{aligned}$$

car la fonction $\theta \mapsto \mathbb{P}_\theta(E < n(c_\alpha - \theta))$ est décroissante. Dès lors, on choisit c_α tel que

$$\mathbb{P}_\theta(E < nc_\alpha) = (1 - e^{-nc_\alpha})\mathbf{1}_{c_\alpha \geq 0} = \alpha$$

c'est-à-dire

$$c_\alpha = -\frac{\log(1-\alpha)}{n}$$

et on vérifie que $c_\alpha \geq 0$. Donc la région de rejet est $\{\hat{\theta}_n < -\log(1-\alpha)/n\}$. Le test ainsi construit est bien de taille α, c'est-à-dire

$$\sup_{\theta \geq 0}\{\mathbb{P}_\theta(\hat{\theta}_n < -\log(1-\alpha)/n)\} = \alpha.$$

Notons que le test proposé précédemment (via le lien avec l'intervalle de confiance) était bien de niveau α (et même de niveau 0), mais pas de taille α.

(c) Calculer la fonction puissance du test. La représenter en fonction de θ pour n et α fixés.

La puissance du test est donnée pour tout θ par

$$\begin{aligned}
\pi(\theta) &= \mathbb{P}_\theta(\text{on rejette } H_0) \\
&= \mathbb{P}_\theta(\hat{\theta}_n < -\log(1-\alpha)/n) \\
&= \mathbb{P}_\theta(n(\hat{\theta}_n - \theta) < -\log(1-\alpha) - n\theta) \\
&= \begin{cases} 1 - (1-\alpha)e^{n\theta} & \text{si } \theta \leq -\log(1-\alpha)/n, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

(d) Comment varie la puissance en fonction de α ? en fonction de n ?

La puissance du test est croissante en α pour tout θ. Ceci est le cas pour tout test correctement calibré. Elle est décroissante en n pour $\theta \in [0, -\log(1-\alpha)/n]$, mais croissante en n pour $\theta < 0$.

Exercice 6 : Soit $\theta > 0$ un paramètre inconnu. On considère la densité f_θ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_\theta(x) = \frac{\theta}{x^2}\mathbf{1}_{x \geq \theta}.$$

Dans ce qui suit, on considère des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes et de densité f_θ.

1. Calculer la fonction de répartition de X_1.

   On a pour tout $x \geq \theta$,

$$F_{X_1}(x) = \int_\theta^x \frac{\theta}{t^2}dt = 1 - \frac{\theta}{x}.$$

2. Calculer la médiane de X_1 et en déduire un estimateur de θ. Est-il consistant ? Asymptotiquement normal ?

On a

$$1 - \frac{\theta}{x} = 1/2 \Leftrightarrow x = 2\theta.$$

Ainsi, on considère l'estimateur $\hat{\theta}_n = X_{([n/2])}/2$. Comme $f\left(x_{1/2}\right) = \frac{1}{4\theta} > 0$, on a

$$\sqrt{n}\left(X_{([n/2])} - 2\theta\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{16\theta^2}{4}\right)$$

et donc

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \theta^2\right).$$

3. Par la méthode des moments, proposer un estimateur. Est-il consistant ? Asymptotiquement normal ?

   On en peut pas passer par $\mathbb{E}\left[X^k\right]$ quand $k > 0$, car ces moments n'existent pas. Par contre, on peut regarder $\mathbb{E}\left[X^{-1}\right]$. En effet, on a alors

$$\mathbb{E}\left[X^{-1}\right] = \int_{\theta}^{+\infty} \frac{\theta}{x^3} dx = \frac{1}{2\theta}$$

   et on obtient donc l'estimateur

$$\hat{\theta}_n = \frac{n}{2\sum_{i=1}^n X_i^{-1}}.$$

   Par la loi des grands nombres, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^{-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \frac{1}{2\theta}$$

   et on obtient la consistance via le théorème de continuité. De plus, on a

$$\mathbb{E}\left[X^{-2}\right] = \int_{\theta}^{+\infty} \frac{\theta}{x^4} dx = \frac{1}{3\theta^2}$$

   et donc $\mathbb{V}\left[X^{-1}\right] = \frac{1}{12\theta^2}$. On a donc

$$\sqrt{n}\left(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^n X_i^{-1} - \frac{1}{\theta}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{3\theta^2}\right).$$

   et donc par la méthode delta

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{3}\theta^2\right).$$

4. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_n$. Déterminer la loi limie de $n\left(\hat{\theta}_n - \theta\right)$.

On a, via les calculs usuels, $\hat{\theta}_n = X_{(1)}$. On a pour tout $x \geq 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[n\left(X_{(1)} - \theta\right) \geq x\right] &= \mathbb{P}\left[X_{(1)} \geq \theta + \frac{x}{n}\right] \\ &= \left(\mathbb{P}\left[X_1 \geq \theta + \frac{x}{n}\right]\right)^n \\ &= \left(1 + \frac{x}{n\theta}\right)^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\frac{x}{\theta}}\end{aligned}$$

et donc $n\left(X_{(1)} - \theta\right)$ converge en loi vers une loi exponentielle de paramètre θ^{-1}.

5. Le modèle $(f_\theta)_{\theta>0}$ est-il régulier ?

   La fonction $\theta \longmapsto f_\theta(x)$ n'est pas continue en x.

6. Pour tout $\epsilon > 0$, calculer
$$\mathbb{P}\left[\hat{\theta}_n \geq (1+\epsilon)\theta\right].$$

   Grâce aux calculs précédents, on a
$$\mathbb{P}\left[\hat{\theta}_n \geq (1+\epsilon)\theta\right] = (1+\epsilon)^{-n}$$

   En déduire un intervalle de confiance non asymptotique de niveau $1-\alpha$.

   On a
$$\mathbb{P}\left[\hat{\theta}_n \geq (1+\epsilon)\theta\right] = \alpha \Leftrightarrow \epsilon = \alpha^{-1/n} - 1$$

   et on obtient donc
$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left[\alpha^{1/n} X_{(1)}; X_{(1)}\right].$$

Exercice 7 : Estimation de deux paramètres Soit $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ inconnu. Soit $X = Y + \theta$ avec $\theta > 0$ inconnu. On admettra que X a pour densité $f_{\theta,\lambda}$ définie pour tout x par

$$f_{\theta,\lambda}(x) = \lambda \exp\left(-\lambda(x-\theta)\right) \mathbf{1}_{[\theta,+\infty[}(x).$$

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d de même loi que X.

1. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{V}[Y]$.

   On a $\mathbb{E}[X] = \theta + \lambda^{-1}$ et $\mathbb{V}[X] = \mathbb{V}[Y] = \lambda^{-2}$.

2. On suppose θ "fixé", le modèle (f_λ) avec $f_\lambda = f_{\theta,\lambda}$ est il régulier ?

   Pour tout $\theta > 0$, on a la mesure ν avec $d\nu(x) = \mathbf{1}_{[\theta,+\infty[}(x)d\mu(x)$ où μ est la mesure de Lebesgue. Puor tout $x > \theta$, la fonction
$$\lambda \longmapsto f_{\theta,\lambda}(x) = \lambda \exp\left(-\lambda(x-\theta)\right) \mathbf{1}_{[\theta,+\infty[}(x)$$

est de classe C^∞. De plus, pour tout $x \geq \theta$,

$$f_\lambda(X) = \ln(\lambda) - \lambda(x - \theta)$$

et

$$f'_\lambda(X) = \frac{1}{\lambda} - (X - \theta)$$

et on obtient donc

$$I(\lambda) = \mathbb{E}[f'_\lambda(X)^2] = \lambda^{-2}$$

qui est bien continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Le modèle est donc régulier.

3. On suppose λ "fixé", le modèle (f_θ) avec $f_\theta = f_{\theta,\lambda}$ est-il régulier ?

   Pour $\lambda > 0$, on a la mesure ν avec $d\nu(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)d\mu(x)$. Pour tout $x > 0$, la fonction

$$\theta \longmapsto f_{\theta,\lambda}(x) = \lambda \exp\left(-\lambda(x - \theta)\right) \mathbf{1}_{[\theta,+\infty[}(x) = \lambda \exp\left(-\lambda(x - \theta)\right) \mathbf{1}_{[0,x]}(\theta)$$

   n'est pas continue en x. En effet, $f_{\theta,\lambda}(x) = \lambda$ et

$$\lim_{\theta \to x^+} = 0.$$

   Attention ! Ce n'est pas parce qu'il y a une indicatrice qu'il y a discontinuité.

   Contre-exemple : La fonction $x \longmapsto |x| = x\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+} - x\mathbf{1}_{R_-^*}$ est continue.

4. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ.

   On a

$$L_{\mathbf{X}}(\theta) = \prod_{i=1}^n \lambda \exp\left(-\lambda\left(X_i - \theta\right)\right) \mathbf{1}_{[\theta,+\infty[}\left(X_i\right) = \lambda^n \exp\left(\lambda\theta - \lambda n \overline{X}_n\right) \mathbf{1}_{[0,x_{(1)}]}(\theta)$$

   et la fonction $\theta \longmapsto \lambda^n \exp\left(\lambda\theta - \lambda n \overline{X}_n\right)$ est clairement croissante. On obtient donc

$$\hat{\theta}_n = X_{(1)}.$$

5. Calculer la fonction de répartition de $X_{(1)}$.

   Pour tout $t \geq \theta$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[X_{(1)} \leq t\right] &= 1 - \mathbb{P}\left[X_{(1)} > t\right] \\
&= 1 - \prod_{i=1}^n \mathbb{P}\left[X_i > t\right] \\
&= 1 - \left(\mathbb{P}\left[X_i > t\right]\right)^n \\
&= 1 - \left(\mathbb{P}\left[Y_i > t - \theta\right]\right)^n \\
&= 1 - \exp\left(-n\lambda\left(t - \theta\right)\right).
\end{aligned}$$

6. En déduire l'erreur quadratique moyenne de $X_{(1)}$.

1ere version : version bourrin On a pour tout $x \geq \theta$,

$$f_{X_{(1)}}(x) = n\lambda \exp\left(-n\lambda(x-\theta)\right)$$

et on obtient donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_{(1)}\right] &= \int_{\theta}^{+\infty} xn\lambda \exp\left(-n\lambda(x-\theta)\right) dx \\
&= \left[-x\exp\left(-n\lambda(x-\theta)\right)\right]_{\theta}^{+\infty} + \int_{\theta}^{+\infty} \exp\left(-n\lambda(x-\theta)\right) dx \\
&= \theta + \left[-\frac{1}{n\lambda}\exp\left(-n\lambda(x-\theta)\right)\right]_{\theta}^{+\infty} \\
&= \frac{1}{n\lambda} + \theta
\end{aligned}$$

et l'estimateur est donc biaisé. De la même façon, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_{(1)}^2\right] &= \int_{\theta}^{+\infty} x^2 n\lambda \exp\left(-n\lambda(x-\theta)\right) dx \\
&= \left[-x^2\exp\left(-n\lambda(x-\theta)\right)\right]_{\theta}^{+\infty} + 2\int_{\theta}^{\infty} x\exp\left(-n\lambda(x-\theta)\right) dx \\
&= \theta^2 + \frac{2}{n\lambda}\mathbb{E}\left[X_{(1)}\right] \\
&= \theta^2 + \frac{2}{n\lambda}\left(\frac{1}{n\lambda} + \theta\right)
\end{aligned}$$

et on obtient donc

$$\mathbb{V}\left[X_{(1)}\right] = \frac{1}{n^2\lambda^2}.$$

2eme version : un peu plus subtile On peut remarquer $X_{(1)} = \theta + Z$ où $Z \sim \mathcal{E}(n\lambda)$ et on obtient directement l'espérance et la variance.

Conclusion : On a par la décomposition biais variance

$$\mathrm{EQM}\left(X_{(1)}, \theta\right) = \frac{2}{n^2\lambda^2}$$

7. Déduire de la question 5

$$\sqrt{n}\left(X_{(1)} - \theta\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

Que pouvez vous en déduire ?

Via question 5 : On a pour tout $\epsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left[\sqrt{n}\left(X_{(1)} - \theta\right) \geq \epsilon\right] = \mathbb{P}\left[X_{(1)} \geq \theta + \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}\right] = \exp(-\sqrt{n}\lambda) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Via question 6 : On a pour tout $\epsilon > 0$, via Markov

$$\mathbb{P}\left[\sqrt{n}\left(X_{(1)} - \theta\right) \geq \epsilon\right] \leq n\frac{\text{EQM}\left(X_{(1)}, \theta\right)}{\epsilon^2} \leq \frac{2}{n\lambda^2\epsilon^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On en déduit que $X_{(1)}$ converge en probabilité vers θ.

8. En déduire un estimateur de λ.

   On a l'estimateur
$$\hat{\lambda}_n = \left(\overline{X}_n - \hat{\theta}_n\right)^{-1}.$$

   Remarque : L'estimateur est presque sûrement bien définie car $\overline{X}_n = \hat{\theta}_n \Rightarrow \forall i, j, X_i = X_j$, ce qui est un évènement de probabilité nulle.

9. Montrer que l'estimateur de λ est consistant. Pour s'aider, on admettra que si (A_n) et (B_n) sont deux suites de variables aléatoires convergeant en probabilités vers a et b, et $g : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue en (a, b), alors
$$g\left(A_n, B_n\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} g(a, b).$$

   avec I, J des intervalles ouvert de $\mathbb{R}$.

   On a (LGN) $\overline{X}_n$ qui converge en probabilité vers $\theta + \lambda^{-1}$ et $\hat{\theta}_n$ converge en probabilité vers θ. De plus, la fonction $g : (x, y) \longmapsto (x - y)^{-1}$ est continue sur $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y\right\}$ et donc continue en $\left(\theta + \lambda^{-1}, \theta\right)$. On a donc la consistance de $\hat{\lambda}_n = g\left(\overline{X}_n, \hat{\theta}_n\right)$.

10. Montrer que
$$\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \hat{\theta}_n - \frac{1}{\lambda}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\lambda^2}\right).$$

    On a la décomposition
$$\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \hat{\theta}_n - \frac{1}{\lambda}\right) = \sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \theta - \frac{1}{\lambda}\right) - \sqrt{n}\left(X_{(1)} - \theta\right).$$

    On a vu que le second terme converge en probabilité vers 0 et pour le premier, on a, comme $X = Y + \theta$,
$$\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \theta - \frac{1}{\lambda}\right) = \sqrt{n}\left(\overline{Y}_n - \frac{1}{\lambda}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\lambda^2}\right),$$

    et on conclut grâce à Slutsky.

11. En déduire la normalité asymptotique de l'estimateur de λ.

    On applique la delta méthode avec $g : x \longmapsto x^{-1}$, et on obtient
$$\sqrt{n}\left(g\left(\overline{X}_n - \hat{\theta}_n\right) - g\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \left(g'\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^2 \frac{1}{\lambda^2}\right)$$

i.e

$$\sqrt{n}\left(\hat{\lambda}_n - \lambda\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \lambda^2\right).$$

12. Soit $\alpha \in (0,1)$, en déduire un intervalle de confiance asymptotique de λ.

    On a

    $$\sqrt{n}\frac{\hat{\lambda}_n - \lambda}{\lambda} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

    Version 1 : Par Slutsky (détailler comme d'habitude)

    $$\sqrt{n}\frac{\hat{\lambda}_n - \lambda}{\hat{\lambda}_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

    et on a donc,

    $$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[-q_{1-\alpha/2} \leq \sqrt{n}\frac{\hat{\lambda}_n - \lambda}{\hat{\lambda}_n} \leq q_{1-\alpha/2}\right] = 1 - \alpha$$

    avec $q_{1-\alpha/2}$ le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi normale centrée réduite, et on obtient donc

    $$IC_{1-\alpha}(\lambda) = \left[\lambda_n \pm q_{1-\alpha/2}\frac{\lambda_n}{\sqrt{n}}\right].$$

    Version 2 : Soit $q_{1-\alpha/2}$ le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi normale centrée réduite, on a

    $$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left[-q_{1-\alpha/2} \leq \sqrt{n}\left(\frac{\hat{\lambda}_n}{\lambda} - 1\right) \leq q_{1-\alpha/2}\right] = 1 - \alpha$$

    et on obtient donc l'intervalle de confiance

    $$IC_{1-\alpha}(\lambda) = \left[\frac{\lambda_n}{1 + \frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}}; \frac{\lambda_n}{1 - \frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}}\right]$$

13. Montrer que

    $$n\left(X_{(1)} - \theta\right) \sim \mathcal{E}(\lambda).$$

    Pour tout $t \geq 0$, on a

    $$\mathbb{P}\left[n\left(X_{(1)} - \theta\right) \leq t\right] = \mathbb{P}\left[X_{(1)} \leq \theta + \frac{t}{n}\right] = 1 - \exp\left(-\lambda t\right).$$

    ce qui et bien la fonction de répartition de $\mathcal{E}(\lambda)$.

14. Pour tout $\alpha \in (0,1)$, donner le quantile $q_{\lambda,1-\alpha}$ d'ordre $1-\alpha$ de la loi exponentielle de paramètre λ.

On a

$$\begin{aligned}
F_Y(t) = 1-\alpha &\Leftrightarrow 1 - \exp\left(-\lambda t\right) = 1-\alpha \\
&\Leftrightarrow \exp\left(-\lambda t\right) = \alpha \\
&\Leftrightarrow -\lambda t = \ln(\alpha) \\
&\Leftrightarrow t = \frac{-\ln(\alpha)}{\lambda}.
\end{aligned}$$

15. Donner la convergence de

$$n\left(X_{(1)} - \theta\right) - \left(q_{\hat{\lambda}_n, 1-\alpha} - q_{\lambda, 1-\alpha}\right).$$

avec $q_{\hat{\lambda}_n} = \frac{-\ln(\alpha)}{\hat{\lambda}_n}$.
On a $n\left(X_{(1)} - \theta\right) \sim \mathcal{E}(\lambda)$ et par le théorème de continuité,

$$q_{\hat{\lambda}_n, 1-\alpha} - q_{\lambda, 1-\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0$$

et on obtient donc, par Slutsky

$$n\left(X_{(1)} - \theta\right) - \left(q_{\hat{\lambda}_n, 1-\alpha} - q_{\lambda, 1-\alpha}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{E}(\lambda).$$

16. Déterminer un intervalle de confiance asymptotique de niveau $1-\alpha$ pour θ.
On a d'après la question précédente,

$$\mathbb{P}\left[n\left(X_{(1)} - \theta\right) - \left(q_{\hat{\lambda}_n, 1-\alpha} - q_{\lambda, 1-\alpha}\right) \le q_{\lambda, 1-\alpha}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 1-\alpha$$

i.e

$$\mathbb{P}\left[n\left(X_{(1)} - \theta\right) \le q_{\hat{\lambda}_n, 1-\alpha}\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1-\alpha$$

i.e

$$\mathbb{P}\left[\theta \ge X_{(1)} - \frac{q_{\hat{\lambda}_n, 1-\alpha}}{n}\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1-\alpha$$

et comme $X_{(1)} \ge \theta$, on obtient

$$\mathbb{P}\left[X_{(1)} - \frac{q_{\hat{\lambda}_n, 1-\alpha}}{n} \le \theta \le X_{(1)}\right] = \mathbb{P}\left[\theta \ge X_{(1)} - \frac{q_{\hat{\lambda}_n, 1-\alpha}}{n}\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1-\alpha$$

et on obtient donc l'intervalle de confiance asymptotique

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left[x_{(1)} - \frac{q_{\lambda_n, 1-\alpha}}{n}; x_{(1)}\right] = \left[x_{(1)} + \frac{\ln(\alpha)}{n\lambda_n}; x_{(1)}\right]$$

Exercice 8 (Loi Bêta dilatée et translatée) : Soit $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de densité :

$$x \in \mathbb{R} \mapsto f_k(x, \theta) = c_k \left[1 - (x-\theta)^2\right]^{k-1} \mathbf{1}_{[\theta-1,\theta+1]}(x),$$

où $k \geq 1$ est connu et $c_k = \frac{\Gamma(2k)}{\Gamma(k)^2 2^{2k-1}}$. Cette densité est celle d'une variable aléatoire qui s'obtient par homothétie de rapport 2 et translation de $\theta - 1$ d'une variable de loi Beta(k, k).
Dans toute la suite, on appellera $\hat{\theta}_n$ un estimateur du maximum de vraisemblance et on étudiera ses propriétés.

Partie 1 On se place tout d'abord dans la situation où $k > 2$.

1. Existence de $\hat{\theta}_n$.

   (a) La vraisemblance est égale à

   $$c_k^n \prod_{i=1}^n (1 - (X_i - \theta)^2)^{k-1} \mathbf{1}_{\theta \in [X_{(n)}-1, X_{(1)}+1]}.$$

   On vérifie que $\mathbb{P}_\theta$-p.s., $\theta \in]X_{(n)} - 1, X_{(1)} + 1[$ donc $]X_{(n)} - 1, X_{(1)} + 1[\neq \emptyset$. Aussi la vraisemblance est nulle en dehors de $]X_{(n)} - 1, X_{(1)} + 1[$ et est strictement positive sur $]X_{(n)} - 1, X_{(1)} + 1[$. Donc, si il existe $\hat{\theta}_n$ qui la maximise, on a $\mathbb{P}_\theta$-p.s.,
   $\hat{\theta}_n \in]X_{(n)} - 1, X_{(1)} + 1[\subset [X_{(n)} - 1, X_{(1)} + 1]$.

   (b) La log-vraisemblance s'écrit, pour $\theta \in]X_{(n)} - 1, X_{(1)} + 1[$:

   $$\ell_n(\theta) = n \log c_k + (k-1) \sum_{i=1}^n \log(1 - (X_i - \theta)^2),$$

   et sa dérivée est égale à

   $$\begin{aligned} \ell_n'(\theta) &= 2(k-1) \sum_{i=1}^n \frac{X_i - \theta}{1 - (X_i - \theta)^2} \\ &= (k-1) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{1 - (X_i - \theta)} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + (X_i - \theta)} \right). \end{aligned}$$

   Lorsque $\theta \to X_{(n)} - 1$, alors $1 - (X_i - \theta) \to X_{(n)} - X_i$, qui vaut 0 si i est tel que $X_i = X_{(n)}$, et qui est strictement positif sinon. De plus $1 + (X_i - \theta) \to 2 + X_i - X_{(n)} > 0$ $\mathbb{P}_\theta$-p.s., pour tout i. Donc $\ell_n'(\theta) \to +\infty$ quand $\theta \to X_{(n)} - 1$.
   Le raisonnement est le même pour montrer que $\ell_n'(\theta) \to -\infty$ quand $\theta \to X_{(1)} + 1$. Par ailleurs, l'application $\theta \mapsto \ell_n'(\theta)$ est strictement décroissante sur $]X_{(n)} - 1, X_{(1)} + 1[$ puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, les fonctions $\theta \mapsto \frac{1}{1-(x-\theta)}$ et $\theta \mapsto -\frac{1}{1+(x-\theta)}$ sont décroissantes sur $]x - 1, +\infty[$ et $]-\infty, 1 + x[$ respectivement.

   (c) La fonction $\theta \mapsto \ell_n'(\theta)$ est continue sur $]X_{(n)} - 1, X_{(1)} + 1[$, strictement décroissante et telle que $\ell_n'(X_{(1)} + 1) = -\infty$ et $\ell_n'(X_{(n)} - 1) = +\infty$, donc il existe un unique point $\hat{\theta}_n$ tel que $\ell'_n(\hat{\theta}_n) = 0$. Ce point vérifie

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\theta}_n)\prod_{j\neq i}(1-(X_j-\hat{\theta}_n)^2) = 0,$$

donc il est racine d'un polynôme de degré $1 + 2(n-1) = 2n-1$.

2. (a) On a, pour $0 \leq \epsilon \leq 2$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\theta[X_1 \leq \theta - 1 + \epsilon] &= \int_{\theta-1}^{\theta-1+\epsilon} c_k(1-(t-\theta)^2)^{k-1}dt \\
&= c_k \int_{-1}^{-1+\epsilon}(1-y^2)^{k-1}dy \\
&= c_k \int_0^{\epsilon} u^{k-1}(2-u)^{k-1}du.
\end{aligned}$$

Si $0 \leq \epsilon \leq 1$, alors $1 \leq 2 - u \leq 2$ donc

$$\mathbb{P}_\theta[X_1 \leq \theta - 1 + \epsilon] \geq c_k \int_0^{\epsilon} u^{k-1}du = \frac{c_k}{k}\epsilon^k.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\theta[X_{(1)} + 1 - \theta \geq \epsilon] &= (\mathbb{P}_\theta[\epsilon_1 \geq \epsilon + \theta - 1])^n \\
&= (1 - \mathbb{P}_\theta[\epsilon < \epsilon + \theta - 1])^n \\
&\leq \left(1 - \frac{c_k\epsilon^k}{k}\right)^n.
\end{aligned}$$

D'où la deuxième inégalité.

(b) Les autres inégalités se montrent par symétrie car $X - \theta \sim \theta - X$.

(c) Pour $0 < \epsilon \leq 1$, puisque $X_{(n)} - 1 \leq \hat{\theta}_n \leq X_{(1)} + 1$ p.s.,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \epsilon\right) &\leq \mathbb{P}\left(\hat{\theta}_n - \theta \geq \epsilon\right) + \mathbb{P}\left(\theta - \hat{\theta}_n \geq \epsilon\right) \\
&\leq \mathbb{P}\Big((X_{(1)} + 1) - \theta \geq \epsilon\Big) + \mathbb{P}\Big(\theta - (X_{(n)} - 1) \geq \epsilon\Big) \\
&\leq 2(1 - C\epsilon^k)^n \\
&\to 0,
\end{aligned}$$

car $(1 - C\epsilon^k) \in [0, 1[$. Ainsi, $\hat{\theta}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \theta$ et $\hat{\theta}_n$ est consistant.
En outre, on a montré que, pour $0 < \epsilon \leq 1$,

$$\mathbb{P}_\theta\Big(|X_{(1)} - (\theta - 1)| \geq \epsilon\Big) = \mathbb{P}_\theta\Big(X_{(1)} - (\theta - 1) \geq \epsilon\Big) \leq (1 - C\epsilon^k)^n,$$

avec $(1 - C\epsilon^k) \in [0, 1[$. Ainsi, par le Lemme de Borel-Cantelli, $X_{(1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} \theta - 1$ et

$X_{(1)} + 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} \theta$. De même, $X_{(n)} - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} \theta$. Enfin, puisque $X_{(n)} - 1 \leq \hat{\theta}_n \leq X_{(1)} + 1$ p.s., il vient (par encadrement) $\hat{\theta}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} \theta$, d'où la consistance forte.

3. Le modèle considéré est un modèle de translation construit à partir de la densité $f(x) = c_k(1-x^2)^{k-1}\mathbf{1}_{x\in[-1,1]}$. Cette densité est continue et C^1 par morceaux. De plus, $f'(x) = c_k(k-1)(-2x)(1-x^2)^{k-2}\mathbf{1}_{x\in[-1,1]}$ donc pour tout $x \in [-1,1]$,

$$(f'(x))^2/f(x) = 4c_k(k-1)^2x^2(1-x^2)^{2k-4-k+1} = 4c_k(k-1)^2x^2(1-x^2)^{k-3}.$$

Par conséquent, en utilisant l'indication,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}(f'(x))^2/f(x)dx &= 4c_k(k-1)^2\int_{-1}^{1}x^2(1-x^2)^{k-3}dx = 8c_k(k-1)^2\int_0^1 x^2(1-x^2)^{k-3}dx \\ &= 4c_k(k-1)^2\int_0^1 y^{1/2}(1-y)^{k-3}dy \\ &= 4c_k(k-1)^2\frac{\Gamma(3/2)\Gamma(k-2)}{\Gamma(k-1/2)} < \infty.\end{aligned}$$

Le modèle est donc régulier et l'information de Fisher vaut

$$I(\theta) = 4c_k(k-1)^2\frac{\Gamma(3/2)\Gamma(k-2)}{\Gamma(k-1/2)}.$$

Puisque $I(\theta) > 0$, et $\hat{\theta}_n$ est convergent, le théorème de convergence de l'EMV dans les modèles réguliers s'applique et on obtient donc :

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1/I(\theta)).$$

Partie 2

1. Lorsque $k \leq 2$, les calculs des questions 1 et 2 restent valident, donc $\hat{\theta}_n$ existe (il n'est pas unique pour $k = 1$) et est fortement consistant. En revanche, pour $k = 1$, la densité f n'est pas continue, donc le modèle n'est pas régulier. Pour $k \in]1,2]$ le calcul de la régularité débouche sur

$$\int_{\mathbb{R}}(f'(x))^2/f(x)dx = \infty,$$

donc, de nouveau, le modèle n'est pas régulier. Ainsi, on peut légitimement supposer que $\hat{\theta}_n$ ne sera pas asymptotiquement normal lorsque $k \in [1,2]$.

2. Par un raisonnement similaire à celui de la question **??**,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\theta\left(n^\alpha|\hat{\theta}_n-\theta|>\epsilon\right) &\leq \mathbb{P}_\theta\left(\hat{\theta}_n-\theta>\frac{\epsilon}{n^\alpha}\right)+\mathbb{P}_\theta\left(\theta-\hat{\theta}_n>\frac{\epsilon}{n^\alpha}\right)\\ &\leq \mathbb{P}\left((X_{(1)}+1)-\theta\geq\frac{\epsilon}{n^\alpha}\right)+\mathbb{P}\left(\theta-(X_{(n)}-1)\geq\frac{\epsilon}{n^\alpha}\right)\\ &\leq 2\left(1-C\frac{\epsilon^k}{n^{\alpha k}}\right)^n.\end{aligned}$$

3. De la question précédente, il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\theta\left(n^\alpha|\hat{\theta}_n-\theta|>\epsilon\right) &\leq 2\left(1-C\frac{\epsilon^k}{n^{\alpha k}}\right)^n\\ &=2e^{n\log\left(1-C\frac{\epsilon^k}{n^{\alpha k}}\right)}\\ &=2e^{-C\frac{\epsilon^k}{n^{\alpha k-1}}+o\left(\frac{1}{n^{\alpha k-1}}\right)} && (\alpha k>0)\\ &\to\begin{cases}2 & \text{si } \alpha k-1>0 \text{ i.e. si } \alpha>1/k\\ 0 & \text{si } \alpha k-1<0 \text{ i.e. si } \alpha<1/k\\ 2e^{-C\epsilon^k} & \text{si } \alpha k=1 \text{ i.e. si } \alpha=1/k.\end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que le terme $|\hat{\theta}_n-\theta|$ tend vers 0 au moins aussi rapidement que $1/n^\alpha$, tant que $\alpha<1/k$. Autrement dit, $\hat{\theta}_n$ tend en probabilité vers θ avec une vitesse d'ordre au moins $1/n^\alpha$, pour $\alpha<1/k$.

En particulier, pour $k<2$, (en prenant $\alpha=1/2<1/k$) $\hat{\theta}_n$ converge avec une vitesse d'ordre au moins $1/\sqrt{n}$ (donc plus rapidement que quand le modèle est régulier).

Lorsque $k=2$, la majoration précédente ne nous indique rien sur la convergence en probabilité de $\sqrt{n}|\hat{\theta}_n-\theta|$. On ne peut donc pas affirmer que $\hat{\theta}_n$ converge plus rapidement que la vitesse $1/\sqrt{n}$.

Pour rappel, lorsque $k>2$, nous avons vu que le modèle est régulier et que $\hat{\theta}_n$ converge à la vitesse $1/\sqrt{n}$.