Polytech Année 2023/2024

L3 Premier semestre

Feuille de TD 2 : Méthodes itératives

Ces exercices sont tirés du cours de P. Tarrago.

Exercice 1 : Calculer le rayon spectral de la matrice d'itération B pour les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel pour

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quelles méthodes convergent ?

Solution de l'exercice 1 : Décider la convergence de la méthode itérative revient à calculer le rayon spectral de la matrice d'itération de la méthode.
Méthode de Jacobi : c'est une méthode de type II avec ici

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc la matrice d'itération de la méthode est

$$B = M^{-1}N = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de B sont les racines de son polynôme caractéristique

$$\det(\lambda Id - B) = \lambda^3 + \frac{5}{4}\lambda = \lambda \left(\lambda + i\sqrt{\frac{5}{4}}\right)\left(\lambda - i\sqrt{\frac{5}{4}}\right).$$

Les valeurs propres de B sont donc $0, \pm i\sqrt{\frac{5}{4}}$, d'où $\rho(B) = \sqrt{\frac{5}{4}}$. Comme $\rho(B) \geq 1$, la méthode ne converge pas.

Méthode de Gauss-Seidel : c'est une méthode de type II avec ici

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$B = M^{-1}N = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propre de B sont les racines du polynôme caractéristique

$$\det(\lambda Id - B) = \lambda(\lambda + 1/2)^2.$$

Les valeurs propres de B sont donc 0 et $-1/2$ (cette dernière avec multiplicité 2), et on déduit que $\rho(B) = 1/2 < 1$. La méthode de Gauss-Seidel est donc convergente.

Exercice 2 : Soit A une matrice diagonalisable. On veut trouver une norme opérateur $\|\cdot\|$ telle que $\rho(A) = \|A\|$.

1. Soit $M \in Gl_n(\mathbb{C})$ telle que $MAM^{-1} = D$, avec D diagonale. Montrer que $\|.\|_M : x \mapsto \|Mx\|_2$ définit une norme sur $\mathbb{C}^n$.
2. En utilisant la base $(M^{-1}e_i)_{1\leq i\leq n}$, avec $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ base canonique de $\mathbb{C}^n$, en déduire que
$$\|A\|_M = \|D\|_2,$$
où $\|A\|_M$ est la norme opérateur de A associée à $\|\cdot\|_M$ sur $\mathbb{C}^n$.
3. En déduire que $\rho(A) = \|A\|_M$.

Solution de l'exercice 2 :

1. On a pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, $\|Mx\|_2 = 0$ si et seulement si $Mx = 0$, et donc si et seulement si $x = 0$ (car M inversible). De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\|M\lambda x\| = \|\lambda Mx\| = |\lambda|\|Mx\|$. De plus, pour tout $x, y \in \mathbb{C}^n$, on a $\|M(x+y)\| = \|Mx + My\| \leq \|Mx\| + \|My\|$. Cette application définit donc bien une norme.
2. On note $d_1, \ldots, d_n$ les éléments diagonaux de D. Pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tel que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i M^{-1} e_i$, et donc $Mx = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$. De plus
$$\|Ax\|_M^2 = \|MAx\|_2^2 = \|MAM^{-1}Mx\|_2^2 = \|D\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\|_2^2 = \left\|\sum_{i=1}^n \lambda_i d_i e_i\right\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2\,|d_i|^2.$$

et on obtient donc, comme $\|x\|_M^2 = \|Mx\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2$,

$$\|A\|_M^2 = \sup\left\{\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 |d_i|^2,\ \text{avec}\ \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 = 1\right\} = \|D\|_2^2.$$

3. Comme D est diagonale, on a $\rho(D) = \|D\|_2$. Donc, $\|A\|_M = \|D\|_2 = \rho(D) = \rho(A)$.

Exercice 3 : L'objectif de cet exercice est de montrer que la méthode de Gauss-Seidel est convergente si A est symétrique définie positive (ce qui signifie que $\langle x, Ax\rangle > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ non nul). On rappellera également que comme A est symétrique, il existe une matrice de passage P unitaire (i.e $P^{-1} = P^T$) et une matrice diagonale D dont les éléments diagonaux sont strictement positifs telles que $A = P^T DP$.

1. Montrer qu'il existe une matrice définie positive C telle que $A = C^2$.
2. Montrer que $x \mapsto \sqrt{\langle x, Ax\rangle}$ définit une norme $\|\cdot\|_A$ sur $\mathbb{R}^n$.
3. Donner en fonction de A l'expression de la matrice M pour la méthode de Gauss-Seidel.
4. Prouver que pour tout $y \in \mathbb{C}^n$ non nul,

$$\langle (M + M^t - A)y, y\rangle > 0.$$

5. En déduire en posant $y = M^{-1}Ax$, que pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ non nul,

$$\langle (Id - M^{-1}A)x, A(Id - M^{-1}A)x\rangle < \langle x, Ax\rangle.$$

6. En déduire que $\|B\|_A < 1$, où B est la matrice d'itération de la méthode de Gauss-Seidel, et conclure.

Solutions de l'exercice 3 :

1. On note $\sqrt{D}$ la matrice diagonale dont les éléments sont la racine carrés des éléments de D. On note $C = P^T\sqrt{D}P$, et on a

$$C^2 = P^T\sqrt{D}PP^T\sqrt{D}P = P^T DP = A.$$

2. Comme il existe une matrice C symétrique définie telle que $A = C^2$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\sqrt{\langle x, Ax\rangle} = \sqrt{\langle x, C^2x\rangle} = \sqrt{\langle Cx, Cx\rangle} = \|Cx\|,$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne. Comme C est définie, $Cx = 0$ si et seulement si $x = 0$, et donc

$$\|Cx\| = 0 \text{ si et seulement si } x = 0.$$

D'autre part, par linéarité de C, pour $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\|C(\lambda x)\| = |\lambda|\|Cx\|,\ \|C(x + y)\| = \|Cx + Cy\| \le \|Cx\| + \|Cy\|.$$

On en déduit que $x \mapsto \|Cx\|$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$, qui coincide avec l'application $\|\cdot\|_A$ définie dans l'énoncé.

3. Ecrivons $A = D - E - F$ avec D matrice diagonale, E triangulaire inférieure avec diagonale nulle et F triangulaire supérieure avec diagonale nulle. La méthode de Gauss-Seidel consiste à prendre $M = D - E$.
4. Comme A est symétrique, on a $F = E^t$. On en déduit que

$$M + M^t - A = D - E + D - E^t - A = D + (D - E - F) - A = D.$$

Comme A est définie positive, $\langle x, Ax\rangle > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ non nul. En particulier, pour la base canonique $\{e_i\}_{1\le i\le n}$ de $\mathbb{R}^n$ cela donne

$$D_{ii} = \langle e_i, Ae_i\rangle > 0.$$

Donc pour tout $y = (y_i)_{1\le i\le n}$ non-nul, on a

$$\langle (M + M^t - A)y, y\rangle = \langle Dy, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} D_{ii}|y_i|^2 > 0.$$

5. En posant $y = M^{-1}Ax$ (ce qui donne $Ax = My$), on a

$$\begin{aligned}\langle x, Ax\rangle - \langle (Id - M^{-1}A)x, A(Id - M^{-1}A)x\rangle &= \langle x, Ax\rangle - \langle x, Ax\rangle + \langle y, Ax\rangle + \langle x, Ay\rangle - \langle y, Ay\rangle \\ &= \langle y, My\rangle + \langle Ax, y\rangle - \langle y, Ay\rangle \\ &= \langle M^t y, y\rangle + \langle My, y\rangle - \langle Ay, y\rangle \\ &= \langle (M + M^t - A)y, y\rangle > 0,\end{aligned}$$

en utilisant la résultat de la question 4 pour la dernière inégalité. On en déduit l'inégalite demandée.

6. Remarquez que par consistance de la méthode de Gauss-Seidel (ou par définition), $N = M - A$ et donc la matrice d'itération B vaut

$$B = M^{-1}(M - A) = Id - M^{-1}A.$$

(Remarquer que cette égalité est vraie pour toute méthode de type II consistante). Par la question précédente, on déduit que

$$\langle x, Ax\rangle > \langle Bx, ABx\rangle \tag{1}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ non-nul. D'autre part la norme opérateur de B respectivement à $\|\cdot\|_A$ est

$$\|B\|_A = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|_A = 1} \|Bx\|_A.$$

Comme l'application $x \mapsto Bx$ est continue car linéaire et l'application $y \mapsto \|y\|_A$ est continue car c'est une norme, l'application $x \mapsto \|Bx\|_A$ est continue. Enfin, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_A = 1\}$ est compact car fermé et borné. On en déduit que l'application $x \mapsto \|Bx\|_A$ atteint son maximum sur $\{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_A = 1\}$ en un point x_0. On déduit que

$$\|B\|_A = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, |x|_A = 1} \|Bx\|_A = \|Bx_0\|_A < \|x_0\|_A = 1,$$

et on a $\|B\|_A < 1$. Comme la matrice d'itération B a une norme opérateur strictement inférieure à 1, la méthode converge.