

Feuille de TD 2 : Estimation

Exercice 1 – Estimation de la moyenne et de la variance.

Soit X une variable aléatoire de moyenne μ et de variance σ^2 inconnues. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X .

1. Rappeler l'estimateur de la moyenne. Montrer qu'il est sans biais, fortement consistant et donner son erreur quadratique moyenne ainsi que sa normalité asymptotique.
2. On souhaite maintenant estimer σ^2 . On propose l'estimateur suivant :

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}_n^2.$$

Expliquer ce choix.

3. Montrer que

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - (\bar{X}_n - \mu)^2.$$

4. Soit $\tau^4 = \mathbb{E}[(X - \mu)^4]$. A l'aide du Théorème de Slutsky, donner la normalité asymptotique de $\hat{\sigma}_n^2$.
5. Calculer $\mathbb{E}[\hat{\sigma}_n^2]$. L'estimateur $\hat{\sigma}_n$ est-il sans biais ?
6. En déduire un estimateur sans biais de σ^2 et donner sa normalité asymptotique.

Exercice 2 – Estimation de la covariance.

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles d'espérances respectives μ_X, μ_Y et de variances respectives σ_X^2, σ_Y^2 . On s'intéresse ici à l'estimation de la covariance C de X, Y , définie par

$$C = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

Soient $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ des couples de variables aléatoires indépendants et de même loi que (X, Y) . On s'intéresse à l'estimateur C_n défini par

$$C_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)(Y_i - \bar{Y}_n).$$

1. Justifier la proposition de cet estimateur.
2. Montrer que

$$\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}_n) (Y_j - \bar{Y}_n) = \sum_{j=1}^n (X_j - \mu_X) (Y_j - \mu_Y) - n (\bar{X}_n - \mu_X) (\bar{Y}_n - \mu_Y).$$

3. Montrer que

$$n^2 (\bar{X}_n - \mu_X) (\bar{Y}_n - \mu_Y) = \sum_{j=1}^n (X_j - \mu_X) (Y_j - \mu_Y) + \sum_{i \neq j} (X_i - \mu_X) (Y_j - \mu_Y).$$

4. Calculer $\mathbb{E}[C_n]$. Que pouvez vous en déduire ?
5. Proposer un estimateur sans biais de C .
6. En posant $Z_j = (X_j - \mu_X) (Y_j - \mu_Y)$, montrer que C_n converge en probabilité vers C .
7. Montrer, soit à l'aide des inégalités de Markov et de Cauchy-Schwarz, soit à l'aide du théorème de Slutsky, que

$$\sqrt{n} (\bar{X}_n - \mu_X) (\bar{Y}_n - \mu_Y) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

8. Soit $\tau^4 = \mathbb{E}[(X - \mu_X)^2 (Y - \mu_Y)^2] < +\infty$. Donner la normalité asymptotique de C_n , et en déduire celle de l'estimateur sans biais.

Exercice 3 – Méthode des moments.

Soit $\theta \in \Theta$ où Θ est un ouvert de $\mathbb{R}$, et $\varphi : \Theta \longrightarrow \varphi(\Theta)$ un C^1 -difféomorphisme. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\mathbb{E}[X^k] = \varphi(\theta).$$

De plus, on suppose que X admet un moment d'ordre $2k$.

1. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de même loi que X . Proposer un estimateur de $\varphi(\theta)$.
2. Est-il consistant ? Asymptotiquement normal ?
3. En déduire un estimateur de θ .
4. Est-il consistant ?
5. On suppose que $\varphi'(\theta) \neq 0$. En déduire la normalité asymptotique de l'estimateur de θ .

Exercice 4 – loi géométrique.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p , i.e pour tout entier $k \geq 1$, $\mathbb{P}[X = k] = (1 - p)^{k-1} p$.

1. Rappeler l'espérance et la variance de X .
2. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X . Par la méthode des moments, donner un estimateur $\hat{p}_n$ de p .
3. Est-il consistant? Fortement consistant? Asymptotiquement normal?
4. Donner l'estimateur $\hat{p}_n^{MV}$ du maximum de vraisemblance de p . Que pouvez vous en conclure?

Exercice 5 – loi exponentielle.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$. On rappelle que la densité de X est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \theta \exp(-x\theta) \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(x).$$

1. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{V}[X]$.
2. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X . A l'aide de la méthode des moments, proposer un estimateur $\hat{\theta}_n$ de θ .
3. Est-il consistant? Fortement consistant?
4. Donner sa normalité asymptotique.
5. Donner l'estimateur (si il existe) du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_n^{MV}$ de θ .
6. Que pouvez vous en conclure?

Exercice 6 – loi de Rayleigh.

Soit θ un entier positif. On considère une variable aléatoire X suivant une loi de Rayleigh de paramètre θ , i.e de f_θ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_\theta(x) = \lambda x \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$.

1. Calculer λ .
2. Calculer l'espérance et la variance de X .
3. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X . En déduire un estimateur $\hat{\theta}_n$ de θ .
4. Est-il consistant? Fortement consistant? Asymptotiquement normal?
5. Donner l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_n^{MV}$ de θ .
6. Donner la normalité asymptotique de cet estimateur.
7. Que pouvez-vous en conclure?

Exercice 7 – Loi de Poisson.

On considère une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre θ .

1. Soit $(X_1, \dots, X_n)$ i.i.d de même loi que X . A l'aide de la méthode des moments, proposer un estimateur de θ .
2. Est-il consistant? Fortement consistant? Asymptotiquement normal?
3. Donner l'estimateur du maximum de vraisemblance.
4. Est-il consistant? Fortement consistant? Asymptotiquement normal?

Exercice 8 – Loi exponentielle tradatée.

Soit Y une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1, i.e de densité f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \exp(-x) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

Soit θ , on considère la variable aléatoire $X = Y + \theta$ de densité

$$f_\theta(x) = \exp(-(x - \theta)) \mathbf{1}_{[\theta, +\infty)}(x).$$

1. Calculer $\mathbb{E}[Y]$ et en déduire $\mathbb{E}[X]$.
2. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X . En déduire un estimateur $\hat{\theta}_n$ de θ . Cet estimateur est-il consistant? Fortement consistant? Sans biais?
3. Calculer $\mathbb{V}[Y]$ et en déduire $\mathbb{V}[X]$.
4. Donner la normalité asymptotique de $\hat{\theta}_n$.
5. Donner l'erreur quadratique moyenne de $\hat{\theta}_n$.
6. Donner l'estimateur $\hat{\theta}_n^{MV}$ du maximum de vraisemblance.
7. Soit $Z_n = \min_{i=1, \dots, n} X_i$. Rappeler la loi de $n(Z_n - \theta)$.
8. Quel estimateur choisiriez vous?
9. Calculer sonr erreur quadratique moyenne.

Exercice 9 – Loi uniforme dilatée.

Soit $\theta > 0$. On considère une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur $[0, \theta]$. Soit $x_1, \dots, x_n$ des réalisation des variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_n$ et de même loi que X .

1. Par la méthode des moments, proposer un estimateur convergent de θ et donner sa convergence.
2. Cet estimateur est-il sans biais?

3. Donner son erreur quadratique moyenne.
4. Donner sa normalité asymptotique.
5. Donner l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ .
6. Calculer la fonction de répartition de X .
7. On considère maintenant $X_{(n)} = \max_{i=1,\dots,n} X_i$. Donner sa fonction de répartition.
8. Montrer que $X_{(n)}$ converge en probabilité vers θ .
9. A l'aide du lemme de Borel-Cantelli, en déduire la forte consistance de $X_{(n)}$.
10. Donner la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre θ^{-1} .
11. Montrer que $n(\theta - X_{(n)})$ converge en loi vers une loi exponentielle de paramètre θ^{-1} .
12. Quel estimateur de θ choisiriez vous ?

Exercice 10 – Loi normale.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2 . Soit $x_1, \dots, x_n$ des réalisations des variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_n$ de même loi que X .

1. Ecrire la vraisemblance
2. En déduire les estimateur du maximums de vraisemblance de μ et σ^2 .
3. Commenter.