Sorbonne Université — Année 2023/2024

M2 Probabilités et finance, Probabilités et Modèles aléatoires — Premier semestre

Eléments de statistique
Feuille de TD 1

Exercice 1 : Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Donner la loi de $Z = -\log(X)$.
2. Soit $Z_1, ..., Z_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de même loi que Z. Donner la normalité asymptotique de $\overline{Z}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i$.
3. En déduire la normalité asymptotique de

$$Y_n = \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)^{1/n}}.$$

Exercice 2 : Soit $(X_n)_n$ une suite de varaibales aléatoires telle que

$$\sqrt{n}X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

1. Appliquer la delta méthode avec $g(x) = \cos x$.
2. Trouver une suite déterministe v_n telle que $v_n(\cos X_n - 1)$ converge vers une loi connue (non dégénérée).

Exercice 3 : inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité de Hölder.

1. **Inégalité de Cauchy-Schwarz :**
   (a) Soit X, Y deux variables aléatoires admettant des moments d'ordre 2. Montrer l'inégalité de Cauchy Schwarz

   $$\mathbb{E}[|XY|] \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]}\sqrt{\mathbb{E}[Y^2]}$$

   (b) Soit (X_n) et (Y_n) deux suites de variables aléatoires convergeant à l'ordre 4 vers 0. En déduire que X_nY_n converge en moyenne quadratique vers 0.
2. Inégalité de Hölder :
   (a) Soient $a, b \geq 0$ et $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que

   $$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

(b) En déduire l'inégalité de Hölder :

$$\mathbb{E}\left[|XY|\right] \leq \left(\mathbb{E}\left[X^p\right]\right)^{\frac{1}{p}} \left(\mathbb{E}\left[Y^q\right]\right)^{\frac{1}{q}}.$$

(c) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires convergeant vers 0 à l'ordre r avec $2 < r < 4$ et (Y_n) une suite de variables aléatoires convergeant vers 0 à l'ordre $\frac{2r}{r-2}$. Montrer $X_n Y_n$ converge en moyenne quadratique vers 0.

Exercice 4 : (loi géométrique) Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p, i.e pour tout entier $k \geq 1$, $\mathbb{P}\left[X = k\right] = (1-p)^{k-1}p$.

1. Rappeler l'espérance et la variance de X.
2. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. Par la méthode des moments, donner un estimateur $\hat{p}_n$ de p.
3. Est-il consistant ? Fortement consistant ? Asymptotiquement normal ?
4. Donner l'estimateur $\hat{p}_n^{MV}$ du maximum de vraisemblance de p. Que pouvez vous en conclure ?

Exercice 5 : (loi de Poisson) On considère une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre θ.

1. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ i.i.d de même loi que X. A l'aide de la méthode des moments, proposer un estimateur de θ.
2. Est-il consistant ? Fortement consistant ? Asymptotiquement normal ?
3. Donner l'estimateur du maximum de vraisembance.
4. Est-il consistant ? Fortement consistant ? Asymptotiquement normal ?

Exercice 6 (loi exponentielle translatée) : Soit Y une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1, i.e de densité f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \exp\left(-x\right)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

Soit θ, on considère la variable aléatoire $X = Y + \theta$ de densité

$$f_\theta(x) = \exp\left(-(x-\theta)\right)\mathbf{1}_{[\theta,+\infty[}(x).$$

1. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{V}[X]$.
2. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. Par la méthode des moments, donner un estimateur $\hat{\theta}_n$ de θ. Cet estimateur est-il consistant ? Fortement consistant ? Sans biais ?
3. Donner la normalité asymptotique de $\hat{\theta}_n$.
4. Donner l'erreur quadratique moyenne de $\hat{\theta}_n$.

5. Donner l'estimateur $\hat{\theta}_n^{MV}$ du maximum de vraisemblance.
6. Donner la loi de $n\left(\hat{\theta}_n^{MV} - \theta\right)$.
7. Calculer la médiane de X_1 et en déduire un nouvel estimateur de θ. Est-il consistant ? asymptotiquement normal ?
8. Quel estimateur choisiriez vous ?

Exercice 7 : (Propriétés des moyenne et médiane empiriques) Soit $X_1, \dots, X_n$ un échantillon de fonction de répartition F avec $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$.

1. (a) Montrer que $\mathbb{E}[X_1] = \arg\min_{t\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[(X_1 - t)^2\right]$.
   (b) Déterminer $\arg\min_{t\in\mathbb{R}} \sum_{i=1}^n (X_i - t)^2/n$.
2. On note $x_{1/2} = F^{-1}(1/2)$ la médiane de la loi de X_1.
   (a) Montrer que si F est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante sur un voisinage de $x_{1/2}$, alors $x_{1/2} = \arg\min_{t\in\mathbb{R}} \mathbb{E}[|X_1 - t|]$.
   Indication : pour toute v.a. positive Y, $\mathbb{E}(Y) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Y > s)\, ds$.
   (b) Déterminer, selon la parité de n, $\arg\min_{t\in\mathbb{R}} \sum_{i=1}^n |X_i - t|/n$.
   Indication : on pourra étudier la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{i=1}^n |X_i - t|/n$ sur les intervalles définis par les statistiques d'ordre $X_{(1)} \leq \ldots \leq X_{(n)}$.

Exercice 8 : Loi de Laplace

1. Soient $X_1, \dots, X_n$ i.i.d de densité donnée pour tout $x \in \mathbb{R}$ par
$$f_\theta(x) = \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{|x|}{\theta}},$$
avec $\theta > 0$. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ. Est-il unique ? Consistant ? Asymptotiquement normal ?
2. Soit $X_1, \dots, X_n$ i.i.d de densité donnée pour tout $x \in \mathbb{R}$ par
$$f_\mu(x) = \frac{1}{2} e^{-|x-\mu|},$$
avec $\mu \in \mathbb{R}$. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de μ. Est-il unique ? Consistant ? Asymptotiquement normal ?