Sorbonne Université — Année 2023/2024

M2 Probabilités et finance, Probabilités et Modèles aléatoires — Premier semestre

Feuille de TD 1
Correction

Exercice 1 : Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Donner la loi de $Z = -\log(X)$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

   $$F_Z(x) = \mathbb{P}\left[-\log(X) \leq X\right] = 1 - \mathbb{P}\left[X \leq \exp(-x)\right] = 1 - \exp\left(-x\right)$$

   et Z suit donc une loi exponentielle de paramètre 1.

2. Soit $Z_1, ..., Z_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de même loi que Z. Donner la normalité asymptotique de $\overline{Z}_n$.

   Les Z_i sont i.i.d et $\mathbb{E}\left[Z_1\right] = \mathbb{V}\left[Z_1\right] = 1$, donc (TLC)

   $$\sqrt{n}\left(\overline{Z}_n - 1\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

3. En déduire la normalité asymptotique de

   $$Y_n = \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)^{1/n}}.$$

   On remarquera que

   $$\log\left(Y_n\right) = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log\left(X_i\right) = \overline{Z}_n.$$

   On a donc $Y_n = \exp\left(\overline{Z}_n\right)$, et la fonction $g : x \longmapsto \exp(x)$ est dérivable en 1, par la delta méthode, on obtient donc

   $$\sqrt{n}\left(Y_n - e\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, e^2\right)$$

Exercice 2 : Soit $\left(X_n\right)_n$ une suite de varaibales aléatoires telle que

$$\sqrt{n}X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

1. Appliquer la delta méthode avec $g(x) = \cos x$.

On a

$$\sqrt{n}\,(\cos X_n - 1) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} 0$$

et on peut donc en déduire que $\cos X_n$ converge vers 1 à une vitesse plus grande que $\sqrt{n}$.

2. Trouver une suite déterministe v_n telle que $v_n\,(\cos X_n - 1)$ converge vers une loi connue (non dégénérée).

   On rappelle que le développement de Taylor de la fonction cos à l'ordre 2 nous donne

   $$\cos x = 1 + \left(r(x) - \frac{1}{2}\right)x^2$$

   avec r une fonction continue en 0 et $r(0) = 0$. On considère maintenant une suite positive v_n que l'on définira ensuite, et on a

   $$v_n\,(X_n - 1) = \left(r\,(X_n) - \frac{1}{2}\right)v_n X_n^2$$

   A noter que X_n converge en probabilité vers 0, et par le théorème de continuité, on a

   $$r\,(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

   De plus en prenant $v_n = n$ et en utilisant le théorème de continuité avec la fonction $x \longmapsto x^2$, on a

   $$v_n X_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)^2$$

   et en appliquant Slutsky, on obtient donc

   $$v_n\,(X_n - 1) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} -\frac{1}{2}\chi_1^2$$

   ce que l'on peut réécrire comme

   $$-2v_n\,(X_n - 1) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \chi_1^2$$

Exercice 3 : inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité de Hölder.

1. **Inégalité de Cauchy-Schwarz :**

   (a) Soit X, Y deux variables aléatoires admettant des moments d'ordre 2. Montrer l'inégalité de Cauchy Schwarz

   $$\mathbb{E}\,[|XY|] \leq \sqrt{\mathbb{E}\,[X^2]}\sqrt{\mathbb{E}\,[Y^2]}$$

   La fonction $\lambda \longmapsto \mathbb{E}\left[(\lambda X - Y)^2\right]$ est un polynôme de degré 2, positif, et dont le discriminant

$$4\mathbb{E}\left[XY\right]^2 - 4\mathbb{E}\left[X^2\right]\mathbb{E}\left[Y^2\right]$$

est toujours négatif ou nul. On obtient donc l'inégalité de Cauchy Schwarz.

(b) Soit (X_n) et (Y_n) deux suites de variables aléatoires convergeant à l'ordre 4 vers 0. En déduire que X_nY_n converge en moyenne quadratique vers 0.

C'est une application direct de Cauchy-Shwarz.

2. Inégalité de Hölder :

(a) Soient $a, b \geq 0$ et $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Option 1 Pour tout b, on considère la fonction $g_b : a \longmapsto \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q - ab$. On a

$$g_b'(a) = a^{p-1} - b$$

et le minimum de la fonction est donc atteint en $b^{\frac{1}{p-1}}$. De plus, comme $q = \frac{p}{p-1}$

$$g_b'\left(b^{\frac{1}{p-1}}\right) = \frac{1}{p}b^{\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{q}b^{\frac{p}{p-1}} - b^{\frac{1}{p-1}+1} = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1\right)b^{\frac{p}{p-1}} = 0.$$

Option 2 : On a

$$\log(ab) = \log\left(a^{\frac{p}{p}}b^{\frac{q}{q}}\right) = \frac{1}{p}\log\left(a^p\right) + \frac{1}{q}\log\left(b^q\right)$$

Comme la fonction log est concave, on obtient

$$\log(ab) \leq \frac{1}{p}\log\left(a^p\right) + \frac{1}{q}\log\left(b^q\right) \leq \log\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right)$$

et on obtient obtient le résultat en passant à l'exponentiel.

(b) En déduire l'inégalité de Hölder :

$$\mathbb{E}\left[|XY|\right] \leq \left(\mathbb{E}\left[|X|^p\right]\right)^{\frac{1}{p}}\left(\mathbb{E}\left[|Y|^q\right]\right)^{\frac{1}{q}}.$$

En prenant

$$a = \frac{|X|}{\left(\mathbb{E}\left[|X|^p\right]\right)^{\frac{1}{p}}} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{|Y|}{\left(\mathbb{E}\left[|Y|^q\right]\right)^{\frac{1}{q}}},$$

on obtient

$$\frac{|X|}{\left(\mathbb{E}\left[|X|^p\right]\right)^{\frac{1}{p}}}\frac{|Y|}{\left(\mathbb{E}\left[|Y|^q\right]\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p}\frac{|X|^p}{\left(\mathbb{E}\left[|X|^p\right]\right)} + \frac{1}{q}\frac{|Y|^q}{\left(\mathbb{E}\left[|Y|^q\right]\right)}$$

En passant à l'espérance, on obtient

$$\frac{\mathbb{E}\left[|X|\,|Y|\right]}{\left(\mathbb{E}\left[|X|^p\right]\right)^{\frac{1}{p}}\left(\mathbb{E}\left[|Y|^q\right]\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

(c) Soit (X_n) une suite convergeant vers 0 à l'ordre r avec $2<r<4$ et (Y_n) une suite convergeant vers 0 à l'ordre $\frac{2r}{r-2}$. Montrer X_nY_n converge en moyenne quadratique vers 0.

On a, en posant $p=r/2$,

$$\mathbb{E}\left[X_n^2Y_n^2\right] \leq \left(\mathbb{E}\left[|X_n|^r\right]\right)^{\frac{2}{r}}\left(\mathbb{E}\left[|Y_n|^{\frac{2r}{r-2}}\right]\right)^{\frac{r-2}{r}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Exercice 4 : (loi géométrique) Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p, i.e pour tout entier $k\geq 1$, $\mathbb{P}\left[X=k\right]=(1-p)^{k-1}p$.

1. Rappeler l'espérance et la variance de X.

   On a $\mathbb{E}[X]=\frac{1}{p}$ et $\mathbb{V}[X]=\frac{1-p}{p^2}$.

2. Soit $X_1,\ldots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. Par la méthode des moments, donner un estimateur $\hat{p}_n$ de p.

   Comme $\mathbb{E}[X]=p^{-1}$, $\overline{X}_n$ converge vers p^{-1} et on propose donc l'estimateur $\hat{p}_n=\overline{X}_n^{-1}$.

3. Est-il consistant ? Fortement consistant ? Asymptotiquement normal ?

   Comme $\overline{X}_n$ converge presque sûrement (LFGN) vers p^{-1} et comme la fonction $g : x \longmapsto x^{-1}$ est continue en $p^{-1}\neq 0$, on obtient la convergence presque sûre à l'aide du théorème de continuité. De plus, comme

   $$\sqrt{n}\left(\overline{X}_n-p^{-1}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}}\mathcal{N}\left(0,\frac{1-p}{p^2}\right),$$

   et comme $g'\left(p^{-1}\right)=-p^2$, on obtient à l'aide de la delta-méthode

   $$\sqrt{n}\left(\hat{p}_n-p\right)\xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}}\mathcal{N}\left(0,p^2(1-p)\right).$$

4. Donner l'estimateur $\hat{p}_n^{MV}$ du maximum de vraisemblance de p. Que pouvez vous en conclure ?

   On a la vraisemblance qui est définie pour tout p par

   $$L_{\mathbf{X}}(p)=\prod_{i=1}^{n}(1-p)^{X_{i-1}}p=p^n\prod_{i=1}^{n}(1-p)^{X_i-1}$$

On obtient donc la log-vraisemblance

$$
\begin{aligned}
l_{\mathbf{X}}(p) &= \ln(p^n) + \sum_{i=1}^{n} \ln(1-p)^{X_i - 1} \\
&= n \ln(p) + \ln(1-p) \sum_{i=1}^{n} X_i - 1 \\
&= n \ln(p) + \ln(1-p) \left(n\overline{X}_n - n \right)
\end{aligned}
$$

En dérivant, on obtient donc

$$
l'_{\mathbf{X}}(p) = \frac{n}{p} - \frac{1}{1-p} \left(n\overline{X}_n - n \right)
$$

En multipliant par $p(1-p) \neq 0$, on obtient alors

$$
\begin{aligned}
l'_{\mathbf{X}}(p) = 0 &\Leftrightarrow n(1-p) - p(n\overline{X}_n - n) = 0 \\
&\Leftrightarrow n - np\overline{X}_n = 0 \\
&\Leftrightarrow p = \overline{X}_n^{-1}.
\end{aligned}
$$

De plus, comme

$$
l''_{\mathbf{X}}(p) = \frac{-n}{p^2} + \frac{1}{(1-p)^2} \left(n - n\overline{X}_n \right)
$$

et $n \leq n\overline{X}_n$, la fonction est strictement concave et X_n est donc son unique minimum. On obtient donc

$$
\hat{p}_n^{MV} = \overline{X}_n^{-1}
$$

et on obtient tous les résultats de convergence avec les questions précédentes. Attention, si $\overline{X}_n = 1$, comme $p < 1$, il n'existe pas de maximum de vraisemblance.

Exercice 5 : (loi de Poisson) On considère une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre θ.

1. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ i.i.d de même loi que X. A l'aide de la méthode des moments, proposer un estimateur de θ.

   On rappelle que $\mathbb{E}[X] = \theta$ et $\mathbb{V}[X] = \theta$. On obtient donc l'estimateur $\hat{\theta}_n = \overline{X}_n$.

2. Est-il consistant ? Fortement consistant ? Asymptotiquement normal ?

   On a la forte consistance grâce à la LFGN et on a le TLC

$$
\sqrt{n} \left(\overline{X}_n - \theta \right) \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \theta).
$$

3. Donner l'estimateur du maximum de vraisembance.

$$L_{\mathbf{X}}(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta^{X_i} e^{-\theta}}{X_i!}$$

On a alors la log-vraisemblance

$$l_{\mathbf{X}}(\theta) = -n\theta + \ln(\theta) \sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} \ln(X_i!)$$

En dérivant par rapport à θ, on obtient

$$l'_{\mathbf{X}}(\theta) = -n + \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

et en cherchant le zéro de la dérivé, on trouve $\theta = \overline{X}_n$ et en dressant le tableau de variation, on voit que c'est l'unique maximum, et on obtient donc $\theta_n^{MV} = \overline{X}_n$. Attention, comme $\theta > 0$, si $\overline{X}_n = 0$, il n'existe pas d'estimateur du maximum de vraisemblance.

4. Est-il consistant ? Fortement consistant ? Asymptotiquement normal ?

Tous les résultats sont donnés par les questions précédentes.

Exercice 6 (loi exponentielle translatée) : Soit Y une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1, i.e de densité f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \exp(-x) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$$

Soit θ, on considère la variable aléatoire $X = Y + \theta$ de densité

$$f_\theta(x) = \exp(-(x-\theta)) \mathbf{1}_{[\theta,+\infty[}(x).$$

1. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et en déduire $\mathbb{V}[X]$.

Y suit une loi exponentielle de paramètre 1, et on a donc $\mathbb{E}[Y] = 1$. On obtient $\mathbb{E}[X] = 1 + \theta$. De plus, $\mathbb{V}[Y] = 1$ et $\mathbb{V}[X] = \mathbb{V}[Y + \theta] = \mathbb{V}[Y] = 1$.

2. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. Par la méthode des moments, donner un estimateur $\hat{\theta}_n$ de θ. Cet estimateur est-il consistant ? Fortement consistant ? Sans biais ?

On obtient donc $\hat{\theta}_n = \overline{X}_n - 1$. Comme la fonction $x \longmapsto x - 1$ est continue, et comme $\overline{X}_n$ converge presque sûrement vers $\theta + 1$ (LFGN), par le théorème de continuité on obtient la forte consistance de notre estimateur. De plus, par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}\left[\hat{\theta}_n\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] + 1 = \frac{n(\theta-1)}{n} + 1 = \theta.$$

3. Donner la normalité asymptotique de $\hat{\theta}_n$.

   Comme $\mathbb{V}[X] = 1$, le TLC nous donne

$$\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - (\theta+1)\right) = \sqrt{n}\left(\left(\overline{X}_n - 1\right) - \theta\right) = \sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

4. Donner l'erreur quadratique moyenne de $\hat{\theta}_n$.

   On a, comme les X_i sont indépendants,

$$\mathbb{V}\left[\hat{\theta}_n\right] = \mathbb{V}\left[\overline{X}_n + 1\right] = \mathbb{V}\left[\overline{X}_n\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}\left[X_i\right] = \frac{1}{n}.$$

5. Donner l'estimateur $\hat{\theta}_n$ du maximum de vraisemblance.

   On a la vraisemblance qui est définie pour tout $\theta > 0$ par

$$L_{\mathbf{X}}(\theta) = \prod_{i=1}^{n}\exp\left(-\left(X_i - \theta\right)\right)\mathbf{1}_{[\theta,+\infty[}\left(X_i\right) = \prod_{i=1}^{n}\exp\left(-\left(X_i - \theta\right)\right)\mathbf{1}_{[0,x_i]}(\theta)$$

   La vraisemblance est don non nulle si et seulement si pour tout i, $\theta \leq X_i$ et donc si et seulement si $\theta \leq X_{(1)} = \min_i X_i$. De plus, elle est croissante sur $]0, X_{(1)}]$ et l'unique maximum est donc atteint en $X_{(1)}$. On obtient donc l'EMV $\hat{\theta}_n^{MV} = X_{(1)}$.

6. Donner la loi de $n\left(\hat{\theta}_n^{MV} - \theta\right)$.

   On a pour tout $x \geq 0$, par indépendances des X_i,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[n\left(\hat{\theta}_n^{MV} - \theta\right) \geq x\right] &= \mathbb{P}\left[\hat{\theta}_n^{MV} \geq \theta + \frac{x}{n}\right] = \mathbb{P}\left[\forall i, X_i \geq \theta + \frac{x}{n}\right] \\
&= \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left[X_i \geq \theta + \frac{x}{n}\right] = \left(\mathbb{P}\left[X_1 \geq \theta + \frac{x}{n}\right]\right)^n \\
&= \left(\mathbb{P}\left[Y_1 \geq \frac{x}{n}\right]\right)^n = \left(\exp\left(-\frac{x}{n}\right)\right)^n \\
&= e^{-x}.
\end{aligned}$$

   On obtient donc $n\left(\hat{\theta}_n^{MV} - \theta\right) \sim \mathcal{E}(1)$.

7. Calculer la médiane de X_1 et en déduire un nouvel estimateur de θ. Est-il consistant ? asymptotiquement normal ? On a $F_{X_1}(x) = 1 - \exp(\theta - x)$ et donc $x_{1/2} = \theta + \ln(2)$. De plus, $f_{X_1}(\theta + \ln(2)) = \frac{1}{2} > 0$, et donc, via le théorème du cours, on a $X_{([n/2])}$ qui converge presque sûrement vers $\theta + \ln(2)$. On a donc $X_{([n/2])} - \ln 2$ qui converge presque sûrement vers θ par le théorème de continuité. De plus,

$$\sqrt{n}\left(X_{([n/2])} - \theta - \ln 2\right) = \sqrt{n}\left(\left(X_{([n/2])} - \ln 2\right) - \theta\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

8. Quel estimateur choisiriez vous ?

Comme $\hat{\theta}_n^{MV}$ converge à la vitesse $1/n$, il converge plus rapidement que les autres et on choisit donc $\hat{\theta}_n^{MV}$.

Exercice 7 :

1. (a) Soit $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{E}\left[(X_1 - t)^2\right]$. Pour tout t, $f(t) = t^2 - 2\mathbb{E}(X_1)t + \mathbb{E}(X_1^2)$ est un trinôme en t strictement convexe. Il admet donc un unique minimum là où sa dérivée s'annule : $f'(t) = 2t - 2\mathbb{E}(X_1) = 0 \Leftrightarrow t = \mathbb{E}(X_1)$.

   (b) De la même manière que précédemment, $t \in \mathbb{R} \mapsto t^2 - 2\left(n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i\right)t + n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i^2$ admet un unique minimum en son point critique qui est $t = n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}_n$.

2. Rappelons que pour toute v.a. $Z \geq 0$, on a

$$\mathbb{E}[Z] = \int_0^\infty \mathbb{P}(Z > z)dz,$$

car l'égalité de Fubini donne

$$\int_0^\infty \mathbb{P}(Z > z)dz = \int_0^\infty \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{Z>z}\right]dz = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \mathbf{1}_{Z>z}dz\right] = \mathbb{E}[Z].$$

   (a) En utilisant l'égalité ci-dessus pour $Z = |X_1 - t|$ et en remarquant que

$$\mathbb{P}(|X_1 - t| > z) \quad = \quad \mathbb{P}\{X_1 - t > z\} + \mathbb{P}\{t - X_1 > z\},$$

   on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(|X_1 - t|\right) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(|X_1 - t| > z)\,dz \\
&= \int_0^\infty \mathbb{P}(X_1 - t > z)\,dz + \int_0^\infty \mathbb{P}(t - X_1 > z)\,dz \\
&= \int_0^\infty (1 - F(z+t))\,dz + \int_0^\infty F(t-z)\,dz \\
&= \int_t^\infty (1 - F(u))\,du + \int_{-\infty}^t F(u)\,du.
\end{aligned}$$

   Rappelons que les deux intégrales sont finies pour tout réel t. Étudions la seconde : on peut donc écrire

$$\int_{-\infty}^t F(u)\underset{\cdot}{u} = \int_{-\infty}^0 F(u)\underset{\cdot}{u} + \int_0^t F(u)\underset{\cdot}{u} = C + \int_0^t F(u)\underset{\cdot}{u},$$

   où $C = \int_{-\infty}^0 F(u)\underset{\cdot}{u}$ est une constante. Comme F est continue, elle admet une primitive Φ, qui est donc de classe C^1 et vérifie

$$\int_{-\infty}^t F(u)\underset{\cdot}{u} = C + \Phi(t) - \Phi(0).$$

Par conséquent, la seconde intégrale, vue comme une fonction de t, est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{-\infty}^{t} F(u)\underset{\cdot}{u}\right) = \Phi'(t) = F(t).$$

Un raisonnement similaire donne

$$\int_{t}^{+\infty} (1-F(u))\,\underset{\cdot}{u} = \int_{0}^{+\infty} (1-F(u))\,\underset{\cdot}{u} - \int_{0}^{t} (1-F(u))\,\underset{\cdot}{u} = C' - t + \Phi(t) - \Phi(0),$$

avec $C' = \int_0^{+\infty} (1-F(u))\,\underset{\cdot}{u}$ est une constante, si bien que

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{t}^{+\infty} (1-F(u))\,\underset{\cdot}{u}\right) = F(t) - 1.$$

Au total, la fonction $t \mapsto \mathbb{E}\left[|X_1 - t|\right]$ est C^1 sur $\mathbb{R}$, de dérivée

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}\left[|X_1 - t|\right] = 2F(t) - 1.$$

Par suite, comme F est une bijection strictement croissante d'un voisinage de $x_{1/2}$ dans un voisinage de $1/2$, on a

$$2F(t) - 1 > 0 \Leftrightarrow t > x_{1/2} \text{ et } 2F(t) - 1 < 0 \Leftrightarrow t < x_{1/2}$$

donc la fonction $t \mapsto \mathbb{E}|X_1 - t|$ atteint son unique minimum en $t = x_{1/2}$.

(b) La fonction $g : t \mapsto \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |X_i - t|$ est affine par morceaux et sa pente change à chaque X_i. En ordonnant les X_i de la façon suivante

$$X_{(1)} \le X_{(2)} \le \cdots \le X_{(n)},$$

et en notant $X_{(0)} = -\infty$ et $X_{(n+1)} = +\infty$, on remarque que la pente de la fonction g vaut $-n/n$ sur $]-\infty, X_{(1)}[$, $-(n-2)/n$ sur $[X_{(1)}, X_{(2)}[$, etc, puis $(n-2)/n$ sur $[X_{(n-1)}, X_{(n)}[$ et n/n sur $[X_{(n)}, \infty[$. Autrement dit, la pente vaut $(2(k-1)-n)/n$ sur l'intervalle $[X_{(k-1)}, X_{(k)}[$ (en excluant $X_{(0)}$ pour $k=1$). Ainsi, de deux choses l'une :

- si n est pair, la pente de g va s'annuler sur un intervalle, correspondant à $[X_{(n/2)}, X_{(n/2+1)}]$. Donc la fonction g est minimale sur l'intervalle $[X_{(n/2)}, X_{(n/2+1)}]$ (l'argmin est alors un intervalle).
- Si n est impair, la pente de g ne va pas s'annuler et cette fonction atteint son unique minimum en $X_{((n+1)/2)}$.

Cependant, puisque la médiane empirique est définie de façon unique par $X_{((n+1)/2)}$ si n est impair et $X_{(n/2)}$ si n est pair, elle minimise dans tous les cas la fonction g (c'est la plus petite valeur minimisant g).

Exercice 8 : Loi de Laplace

1. Soient $X_1, \dots, X_n$ i.i.d de densité donnée pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_\theta(x) = \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{|x|}{\theta}},$$

avec $\theta > 0$. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ. Est-il unique ? Consistant ? Asymptotiquement normal ?

Pour tout $\theta > 0$, on a

$$L_{\mathbf{X}}(\theta) = \frac{1}{2^n \theta^n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n |X_i|}$$

et

$$l_{\mathbf{X}}(\theta) = -n\ln(2) - n\ln(\theta) - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n |X_i|$$

et donc

$$l'_{\mathbf{X}}(\theta) = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^n |X_i| = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |X_i|$$

et il suffit de dresser le tableau de variations pour conclure. De plus, à l'aide d'une IPP

$$\mathbb{E}\left[|X_1|\right] = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \theta,$$

et on obtient donc la forte consistance via la LFGN. De la même façon,

$$\mathbb{E}\left[|X_1|^2\right] = 2\theta^2 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}\left[|X_1|\right] = \theta^2$$

et on obtient donc

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n^{MV} - \theta\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \theta^2\right).$$

2. Soit $X_1, \dots, X_n$ i.i.d de densité donnée pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_\mu(x) = \frac{1}{2} e^{-|x-\mu|},$$

avec $\mu \in \mathbb{R}$. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de μ. Est-il unique ? Consistant ? Asymptotiquement normal ?

Pour tout $\mu \in \mathbb{R}$,

$$L_{\mathbf{X}}(\mu) = \frac{1}{2^n} \exp\left(-\sum_{i=1}^n |X_i - \mu|\right)$$

et donc

$$l_{\mathbf{X}}(\mu) = -n\ln(2) - \sum_{i=1}^n |X_i - \mu|$$

et on obtient donc $\hat{\mu}_n^{MV} = X_{([n/2])}$. A noter que comme la densité est sympétrique, on a $F_{X_1}^{-1}(1/2) = \mu$ et F_{X_1} est strictement croissante en μ donc on a la consistance de m_n via le théorème du cours. De plus, on a, comme $f(\mu) = \frac{1}{2}$,

$$\sqrt{n}\,(m_n - \mu) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\,(0,1)\,.$$