Feuille de TD 1
Correction

Exercice 1 :

1. Rappeler les définitions de la convergence en loi, en probabilité, presque sûre et en moyenne quadratique .
   — On dit que X_n converge en loi vers X si pour toute fonction continue bornée φ, $\mathbb{E}\left[\varphi\left(X_n\right)\right]$ converge vers $\mathbb{E}\left[\varphi(X)\right]$.
   — On dit que X_n converge en probabilité vers X si pour tout $\epsilon > 0$,
   $$\mathbb{P}\left[|X_n - X| > \epsilon\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$
   — On dit que X_n converge presque sûrement vers X si
   $$\mathbb{P}\left\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\right\} = \mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega, X_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} X\right\} = 1.$$
   — On dit que X_n converge en moyenne quadratique vers X si
   $$\mathbb{E}\left[(X_n - X)^2\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$
2. Montrer que la convergence en moyenne quadratique implique la convergence en probabilité.

   Soit (X_n) une suite de variables aléatoires convergeant en moyenne quadratique vers X. Soit $\epsilon > 0$, grâce à l'inégalité de Markov,
   $$\mathbb{P}\left[|X_n - X| > \epsilon\right] \leq \frac{\mathbb{E}\left[|X_n - X|^2\right]}{\epsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$
3. Soit a une constante et (X_n) une suite de variables aléatoires. Montrer que si (X_n) converge en loi vers a, alors (X_n) converge en probabilité vers a.

   Comme on a la convergence en loi, on a en particulier que pour tout point de continuité x

de F, $F_{X_n}(x)$ converge vers $F(x)$. On obtient donc, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[|X_n - a| \geq \epsilon\right] &= \mathbb{P}\left[X_n \geq \epsilon + a\right] + \mathbb{P}\left[X_n \leq a - \epsilon\right] \\
&= 1 - F_{X_n}\left(\epsilon + a\right) + F_{X_n}\left(\epsilon - a\right) \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - F_a(\epsilon + a) + F_a(\epsilon - a)
\end{aligned}$$

Or $F_a(x) = 0$ si $x < a$ et 1 sinon, et comme $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[|X_n - X| \geq \epsilon\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - 1 + 0 = 0.$$

Attention, les inégalités précédentes ne sont vraies que si les variables aléatoires X_n sont continues (sinon il faut rajouter un terme $\mathbb{P}\left[X_n = \epsilon + a\right]$).

4. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires convergeant en loi vers une constante a et soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $h\left(X_n\right)$ converge en probabilité vers $h(a)$.

   1ere version : Comme la convergence en loi vers une constante implique la convergence en probabilité, il suffit de montrer la convergence en loi de $h\left(X_n\right)$ vers $h(a)$. Comme h est continue, pour toute fonction continue bornée φ, la fonction $\varphi o h$ est une fonction continue et bornée, et comme X_n converge en loi vers a,

   $$\mathbb{E}\left[\varphi\left(h\left(X_n\right)\right)\right] = \mathbb{E}\left[\left(\varphi o h\right)\left(X_n\right)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}\left[\varphi\left(h\left(a\right)\right)\right].$$

   2ème version : Soit $\epsilon > 0$. Comme h est continue, il existe $\eta > 0$ telle pour tout $x, |x - a| \leq \eta$, on ait $|h(x) - h(a)| < \epsilon$. On obtient donc

   $$\mathbb{P}\left[\left|h\left(X_n\right) - h(a)\right| \geq \epsilon\right] \leq \mathbb{P}\left[|X_n - a| > \eta\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

5. Etudier la convergence de la suite (X_n) dans chacun des cas suivants :
   — $X_n = 1/n$.

   La suite est déterministe et converge vers 0, on a donc tous les types de convergence.
   — $X_n = (-1)^n$.

   La suite est déterministe et ne converge pas, on n'a donc aucun type de convergence.
   — $X_n = \mathbf{1}_{A_n}$ où A_n est une suite d'évènements et $\mathbb{P}\left[A_n\right]$ converge vers 0.

   On a $\mathbb{E}\left[X_n^2\right] = \mathbb{P}\left[A_n\right] \to 0$, et donc convergence en moyenne quadratique, en probabilité et en loi. En revanche, on n'a pas nécessairement la convergence presque sûre. On construit des ensembles A_n de la façon suivante :
   — $A_1 = [0, 1]$
   — On coupe A_1 en deux : $A_2 = [0, 1/2]$ et $A_3 = [1/2, 1]$
   — On coupe A_2 et A_3 en deux : $A_4 = [0, 1/4]$, $A_5 = [1/4, 1/2]$, $A_6 = [1/2, 3/4]$, $A_7 = [3/4, 1]$.

On considère l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1,], \mathcal{B}([0,1]), \mathrm{Leb}[0,1])$, et on a $\mathbb{P}[A_n] = (1/2)^{\log_2 n} \to 0$. Or pour tout $\omega \in [0,1]$, $X_n(\omega)$ n'admet pas de limite.

— $X_n = Z_n \mathbf{1}_{B_n}$ où Z_n converge en loi vers une variable aléatoire Z et $\mathbb{P}[B_n]$ converge vers 1.

  On la convergence en loi grâce au théorème de Slutsky. Par contre, on n'a pas nécessairement la convergence en probabilité. Il suffit de considérer $B_n = \Omega$ et de reprendre l'exemple du cours, $X_n = -X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 2 : Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Donner la loi de $Z = -\log(X)$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

   $$F_Z(x) = \mathbb{P}[-\log(X) \leq X] = 1 - \mathbb{P}[X \leq \exp(-x)] = 1 - \exp(-x)$$

   et Z suit donc une loi exponentielle de paramètre 1.

2. Soit $Z_1, ..., Z_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de même loi que Z. Donner la normalité asymptotique de $\overline{Z}_n$.

   Les Z_i sont i.i.d et $\mathbb{E}[Z_1] = \mathbb{V}[Z_1] = 1$, donc (TLC)

   $$\sqrt{n}\left(\overline{Z}_n - 1\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

3. En déduire la normalité asymptotique de

   $$Y_n = \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)^{1/n}}.$$

   On remarquera que

   $$\log(Y_n) = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log(X_i) = \overline{Z}_n.$$

   On a donc $Y_n = \exp\left(\overline{Z}_n\right)$, et la fonction $g : x \longmapsto \exp(x)$ est dérivable en 1, par la delta méthode, on obtient donc

   $$\sqrt{n}\left(Y_n - e\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, e^2\right)$$

Exercice 3 : (Inégalité de Hoeffding simplifiée) Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et centrées. L'objectif est de montrer que si $|X_n| \leq M$ p.s, alors pour tout $x > 0$,

$$\mathbb{P}\left[\overline{X}_n > x\right] \leq \exp\left(-\frac{nx^2}{2M^2}\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left[\left|\overline{X}_n\right| > x\right] \leq 2\exp\left(-\frac{nx^2}{2M^2}\right).$$

1. Soit $\lambda > 0$ et $x \in [-M, M]$, montrer que

$$\exp(\lambda x) \leq \frac{M-x}{2M} \exp\left(-\lambda M\right) + \frac{x+M}{2M} \exp(\lambda M).$$

La fonction $x \longmapsto \exp(\lambda x)$ est convexe, et on a donc

$$\exp\left(\lambda x\right) = \exp\left(\frac{M-x}{2M}\left(-\lambda M\right) + \frac{M+x}{2M}\lambda M\right) \leq \frac{M-x}{2M} \exp\left(-\lambda M\right) + \frac{x+M}{2M} \exp(\lambda M)$$

2. Sachant que pour tout $u > 0$, $\cosh(u) \leq \exp(u^2/2)$, en déduire que pour tout i,

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda X_i\right)\right] \leq \cosh(\lambda M) \leq \exp\left(\lambda^2 M^2/2\right).$$

On a, comme les X_i sont centrés,

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda X_i\right)\right] \leq \frac{M - \mathbb{E}\left[X_i\right]}{2M} \exp\left(-\lambda M\right) + \frac{\mathbb{E}\left[X_i\right] + M}{2M} \exp(\lambda M) = \cosh(\lambda M)$$

3. Montrer que pour tout $\lambda > 0$ et $x > 0$,

$$\mathbb{P}\left[\overline{X}_n > x\right] \leq \exp\left(n\left(\frac{\lambda^2 M^2}{2} - \lambda x\right)\right)$$

et conclure.

On a, par indépendance et en utilisant Markov

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\overline{X}_n > x\right] &= \mathbb{P}\left[\exp\left(n\lambda \overline{X}_n\right) > \exp(n\lambda x)\right] \leq \mathbb{E}\left[\exp\left(n\lambda\overline{X}_n\right)\right] \exp\left(-n\lambda x\right) \\
&= \left(\prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda X_i\right)\right]\right) \exp\left(-n\lambda x\right) \leq \left(\prod_{i=1}^n \exp\left(\frac{\lambda^2 M^2}{2}\right)\right) \exp\left(-n\lambda x\right) \\
&= \exp\left(n\left(\frac{\lambda^2 M^2}{2} - \lambda x\right)\right)
\end{aligned}$$

La majoration précédente est minimisée pour $\lambda = xM^{-2}$ et on obtient le résultat. De plus,

$$\mathbb{P}\left[\overline{X}_n < -x\right] = \mathbb{P}\left[-\overline{X}_n > x\right]$$

et comme $-X_i$ vérifie les mêmes hypothèses que X_i, on retrouve

$$\mathbb{P}\left[\overline{X}_n < -x\right] \leq \exp\left(-\frac{nx^2}{2M^2}\right)$$

Exercice 4 : inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité de Hölder.

1. **Inégalité de Cauchy-Schwarz :**

   (a) Soit X, Y deux variables aléatoires admettant des moments d'ordre 2. Montrer l'inégalité de Cauchy Schwarz

$$\mathbb{E}\left[|XY|\right] \leq \sqrt{\mathbb{E}\left[X^2\right]}\sqrt{\mathbb{E}\left[Y^2\right]}$$

La fonction $\lambda \longmapsto \mathbb{E}\left[(\lambda X - Y)^2\right]$ est un polynôme de degré 2, positif, et dont le discriminant

$$4\mathbb{E}\left[XY\right]^2 - 4\mathbb{E}\left[X^2\right]\mathbb{E}\left[Y^2\right]$$

est toujours négatif ou nul. On obtient donc l'inégalité de Cauchy Schwarz.

(b) Soit (X_n) et (Y_n) deux suites de variables aléatoires convergeant à l'ordre 4 vers 0. En déduire que $X_n Y_n$ converge en moyenne quadratique vers 0.

C'est une application direct de Cauchy-Shwarz.

2. Inégalité de Hölder :

(a) Soient $a, b \geq 0$ et $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Option 1 : Pour tout b, on considère la fonction $g_b : a \longmapsto \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q - ab$. On a

$$g_b'(a) = a^{p-1} - b$$

et le minimum de la fonction est donc atteint en $b^{\frac{1}{p-1}}$. De plus, comme $q = \frac{p}{p-1}$

$$g_b'\left(b^{\frac{1}{p-1}}\right) = \frac{1}{p}b^{\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{q}b^{\frac{p}{p-1}} - b^{\frac{1}{p-1}+1} = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1\right)b^{\frac{p}{p-1}} = 0.$$

Option 2 : On a

$$\log(ab) = \log\left(a^{\frac{p}{p}}b^{\frac{q}{q}}\right) = \frac{1}{p}\log\left(a^p\right) + \frac{1}{q}\log\left(b^q\right)$$

Comme la fonction log est concave, on obtient

$$\log(ab) = \frac{1}{p}\log\left(a^p\right) + \frac{1}{q}\log\left(b^q\right) \leq \log\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right)$$

et on obtient obtient le résultat en passant à l'exponentiel.

(b) En déduire l'inégalité de Hölder :

$$\mathbb{E}\left[|XY|\right] \leq \left(\mathbb{E}\left[|X|^p\right]\right)^{\frac{1}{p}}\left(\mathbb{E}\left[|Y|^q\right]\right)^{\frac{1}{q}}.$$

En prenant

$$a = \frac{|X|}{\left(\mathbb{E}\left[|X|^p\right]\right)^{\frac{1}{p}}} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{|Y|}{\left(\mathbb{E}\left[|Y|^q\right]\right)^{\frac{1}{q}}},$$

on obtient

$$\frac{|X|}{\left(\mathbb{E}\left[|X|^p\right]\right)^{\frac{1}{p}}} \frac{|Y|}{\left(\mathbb{E}\left[|Y|^q\right]\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \frac{|X|^p}{\left(\mathbb{E}\left[|X|^p\right]\right)} + \frac{1}{q} \frac{|Y|^q}{\left(\mathbb{E}\left[|Y|^q\right]\right)}$$

En passant à l'espérance, on obtient

$$\frac{\mathbb{E}\left[|X|\,|Y|\right]}{\left(\mathbb{E}\left[|X|^p\right]\right)^{\frac{1}{p}} \left(\mathbb{E}\left[|Y|^q\right]\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

(c) Soit (X_n) une suite convergeant vers 0 à l'ordre r avec $2 < r < 4$ et (Y_n) une suite convergeant vers 0 à l'ordre $\frac{2r}{r-2}$. Montrer $X_n Y_n$ converge en moyenne quadratique vers 0.

On a, en posant $p = r/2$,

$$\mathbb{E}\left[X_n^2 Y_n^2\right] \leq \left(\mathbb{E}\left[|X_n|^r\right]\right)^{\frac{2}{r}} \left(\mathbb{E}\left[|Y_n|^{\frac{2r}{r-2}}\right]\right)^{\frac{r-2}{r}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Exercice 5 : (loi géométrique) Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p, i.e pour tout entier $k \geq 1$, $\mathbb{P}\left[X = k\right] = (1-p)^{k-1} p$.

1. Rappeler l'espérance et la variance de X.

   On a $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$ et $\mathbb{V}[X] = \frac{1-p}{p^2}$.

2. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. Par la méthode des moments, donner un estimateur $\hat{p}_n$ de p.

   Comme $\mathbb{E}[X] = p^{-1}$, $\overline{X}_n$ converge vers p^{-1} et on propose donc l'estimateur $\hat{p}_n = \overline{X}_n^{-1}$.

3. Est-il consistant ? Fortement consistant ? Asymptotiquement normal ?

   Comme $\overline{X}_n$ converge presque sûrement (LFGN) vers p^{-1} et comme la fonction $g : x \longmapsto x^{-1}$ est continue en $p^{-1} \neq 0$, on obtient la convergence presque sûre à l'aide du théorème de continuité. De plus, comme

   $$\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - p^{-1}\right) \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1-p}{p^2}\right),$$

   et comme $g'\left(p^{-1}\right) = -p^2$, on obtient à l'aide de la delta-méthode

   $$\sqrt{n}\left(\hat{p}_n - p\right) \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, p^2(1-p)\right).$$

4. Donner l'estimateur $\hat{p}_n^{MV}$ du maximum de vraisemblance de p. Que pouvez vous en

conclure ?

On a la vraisemblance qui est définie pour tout p par

$$L_{\mathbf{X}}(p) = \prod_{i=1}^{n} (1-p)^{X_{i-1}} p = p^n \prod_{i=1}^{n} (1-p)^{X_i - 1}$$

On obtient donc la log-vraisemblance

$$\begin{aligned} l_{\mathbf{X}}(p) &= \ln(p^n) + \sum_{i=1}^{n} \ln(1-p)^{X_i-1} \\ &= n\ln(p) + \ln(1-p) \sum_{i=1}^{n} X_i - 1 \\ &= n\ln(p) + \ln(1-p)\left(n\overline{X}_n - n\right) \end{aligned}$$

En dérivant, on obtient donc

$$l'_{\mathbf{X}}(p) = \frac{n}{p} - \frac{1}{1-p}\left(n\overline{X}_n - n\right)$$

En multipliant par $p(1-p) \neq 0$, on obtient alors

$$\begin{aligned} l'_{\mathbf{X}}(p) = 0 &\Leftrightarrow n(1-p) - p(n\overline{X}_n - n) = 0 \\ &\Leftrightarrow n - np\overline{X}_n = 0 \\ &\Leftrightarrow p = \overline{X}_n^{-1}. \end{aligned}$$

De plus, comme

$$l''_{\mathbf{X}}(p) = \frac{-n}{p^2} + \frac{1}{(1-p)^2}\left(n - n\overline{X}_n\right)$$

et $n \leq n\overline{X}_n$, la fonction est strictement concave et X_n est donc son unique minimum. On obtient donc

$$\hat{p}_n^{MV} = \overline{X}_n^{-1}$$

et on obtient tous les résultats de convergence avec les questions précédentes. Attention, si $\overline{X}_n = 1$, comme $p < 1$, il n'existe pas de maximum de vraisemblance.

Exercice 6 : (loi de Poisson) On considère une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre θ.

1. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ i.i.d de même loi que X. A l'aide de la méthode des moments, proposer un estimateur de θ.

   On rappelle que $\mathbb{E}[X] = \theta$ et $\mathbb{V}[X] = \theta$. On obtient donc l'estimateur $\hat{\theta}_n = \overline{X}_n$.

2. Est-il consistant ? Fortement consistant ? Asymptotiquement normal ?

On a la forte consistance grâce à la LFGN et on a le TLC

$$\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \theta\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\theta).$$

3. Donner l'estimateur du maximum de vraisembance.

$$L_{\mathbf{X}}(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta^{X_i} e^{-\theta}}{X_i!}$$

On a alors la log-vraisemblance

$$l_{\mathbf{X}}(\theta) = -n\theta + \ln(\theta) \sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} \ln(X_i!)$$

En dérivant par rapport à θ, on obtient

$$l'_{\mathbf{X}}(\theta) = -n + \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

et en cherchant le zéro de la dérivé, on trouve $\theta = \overline{X}_n$ et en dressant le tableau de variation, on voit que c'est l'unique maximum, et on obtient donc $\theta_n^{MV} = \overline{X}_n$. Attention, comme $\theta > 0$, si $\overline{X}_n = 0$, il n'existe pas d'estimateur du maximum de vraisemblance.

4. Est-il consistant ? Fortement consistant ? Asymptotiquement normal ?

   Tous les résultats sont donnés par les questions précédentes.

Exercice 7 (loi exponentielle translatée) : Soit Y une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1, i.e de densité f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \exp(-x)\, \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$$

Soit θ, on considère la variable aléatoire $X = Y + \theta$ de densité

$$f_\theta(x) = \exp(-(x-\theta))\, \mathbf{1}_{[\theta,+\infty[}(x).$$

1. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et en déduire $\mathbb{V}[X]$.

   Y suit une loi exponentielle de paramètre 1, et on a donc $\mathbb{E}[Y] = 1$. On obtient $\mathbb{E}[X] = 1 + \theta$. De plus, $\mathbb{V}[Y] = 1$ et $\mathbb{V}[X] = \mathbb{V}[Y + \theta] = \mathbb{V}[Y] = 1$.

2. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. Par la méthode des moments, donner un estimateur $\hat{\theta}_n$ de θ. Cet estimateur est-il consistant ? Fortement consistant ? Sans biais ?

   On obtient donc $\hat{\theta}_n = \overline{X}_n - 1$. Comme la fonction $x \longmapsto x - 1$ est continue, et comme $\overline{X}_n$ converge presque sûrement vers $\theta + 1$ (LFGN), par le théorème de continuité on obtient la forte consistance de notre estimateur. De plus, par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}\left[\hat{\theta}_n\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i] + 1 = \frac{n(\theta-1)}{n} + 1 = \theta.$$

3. Donner la normalité asymptotique de $\hat{\theta}_n$.

   Comme $\mathbb{V}[X] = 1$, le TLC nous donne

$$\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - (\theta+1)\right) = \sqrt{n}\left(\left(\overline{X}_n - 1\right) - \theta\right) = \sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

4. Donner l'erreur quadratique moyenne de $\hat{\theta}_n$.

   On a, comme les X_i sont indépendants,

$$\mathbb{V}\left[\hat{\theta}_n\right] = \mathbb{V}\left[\overline{X}_n + 1\right] = \mathbb{V}\left[\overline{X}_n\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}\left[X_i\right] = \frac{1}{n}.$$

5. Donner l'estimateur $\hat{\theta}_n$ du maximum de vraisemblance.

   On a la vraisemblance qui est définie pour tout $\theta > 0$ par

$$L_{\mathbf{X}}(\theta) = \prod_{i=1}^{n}\exp\left(-\left(X_i - \theta\right)\right)\mathbf{1}_{[\theta,+\infty[}\left(X_i\right) = \prod_{i=1}^{n}\exp\left(-\left(X_i - \theta\right)\right)\mathbf{1}_{[0,x_i]}(\theta)$$

   La vraisemblance est don non nulle si et seulement si pour tout i, $\theta \leq X_i$ et donc si et seulement si $\theta \leq X_{(1)} = \min_i X_i$. De plus, elle est croissante sur $]0, X_{(1)}]$ et l'unique maximum est donc atteint en $X_{(1)}$. On obtient donc l'EMV $\hat{\theta}_n^{MV} = X_{(1)}$.

6. Donner la loi de $n\left(\hat{\theta}_n^{MV} - \theta\right)$.

   On a pour tout $x \geq 0$, par indépendances des X_i,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[n\left(\hat{\theta}_n^{MV} - \theta\right) \geq x\right] &= \mathbb{P}\left[\hat{\theta}_n^{MV} \geq \theta + \frac{x}{n}\right] = \mathbb{P}\left[\forall i, X_i \geq \theta + \frac{x}{n}\right] \\
&= \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left[X_i \geq \theta + \frac{x}{n}\right] = \left(\mathbb{P}\left[X_1 \geq \theta + \frac{x}{n}\right]\right)^n \\
&= \left(\mathbb{P}\left[Y_1 \geq \frac{x}{n}\right]\right)^n = \left(\exp\left(-\frac{x}{n}\right)\right)^n \\
&= e^{-x}.
\end{aligned}$$

   On obtient donc $n\left(\hat{\theta}_n^{MV} - \theta\right) \sim \mathcal{E}(1)$.

7. Calculer la médiane de X_1 et en déduire un nouvel estimateur de θ. Est-il consistant ? asymptotiquement normal ? On a $F_{X_1}(x) = 1 - \exp\left(\theta - x\right)$ et donc $x_{1/2} = \theta + \ln(2)$. De plus, $f_{X_1}(\theta + \ln(2)) = \frac{1}{2} > 0$, et donc, via le théorème du cours, on a $X_{([n/2])}$ qui converge presque sûrement vers $\theta + \ln(2)$. On a donc $X_{([n/2])} - \ln 2$ qui converge presque sûrement

vers θ par le théorème de continuité. De plus,

$$\sqrt{n}\left(X_{([n/2])}-\theta-\ln 2\right)=\sqrt{n}\left(\left(X_{([n/2])}-\ln 2\right)-\theta\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}}\mathcal{N}\left(0,1\right)$$

8. Quel estimateur choisiriez vous ?

   Comme $\hat{\theta}_n^{MV}$ converge à la vitesse $1/n$, il converge plus rapidement que les autres et on choisit donc $\hat{\theta}_n^{MV}$.

Exercice 8 : Loi de Laplace

1. Soient $X_1,\ldots,X_n$ i.i.d de densité donnée pour tout $x\in\mathbb{R}$ par

   $$f_\theta(x)=\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{|x|}{\theta}},$$

   avec $\theta>0$. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ. Est-il unique ? Consistant ? Asymptotiquement normal ?

   Pour tout $\theta>0$, on a

   $$L_{\mathbf{X}}\left(\theta\right)=\frac{1}{2^n\theta^n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n|X_i|}$$

   et

   $$l_{\mathbf{X}}\left(\theta\right)=-n\ln(2)-n\ln(\theta)-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n|X_i|$$

   et donc

   $$l_{\mathbf{X}}'\left(\theta\right)=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^n|X_i|=0\Leftrightarrow\theta=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n|X_i|$$

   et il suffit de dresser le tableau de variations pour conclure. De plus, à l'aide d'une IPP

   $$\mathbb{E}\left[|X_1|\right]=\int_0^{+\infty}\frac{x}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=\theta,$$

   et on obtient donc la forte consistance via la LFGN. De la même façon,

   $$\mathbb{E}\left[|X_1|^2\right]=2\theta^2\quad\text{et}\quad\mathbb{V}\left[|X_1|\right]=\theta^2$$

   et on obtient donc

   $$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n^{MV}-\theta\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}}\mathcal{N}\left(0,\theta^2\right).$$

2. Soit $X_1,\ldots,X_n$ i.i.d de densité donnée pour tout $x\in\mathbb{R}$ par

   $$f_\mu(x)=\frac{1}{2}e^{-|x-\mu|},$$

   avec $\mu\in\mathbb{R}$. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de μ. Est-il unique ? Consistant ? Asymptotiquement normal ?

Pour tout $\mu \in \mathbb{R}$,

$$L_{\mathbf{X}}(\mu) = \frac{1}{2^n} \exp\left(- \sum_{i=1}^{n} |X_i - \mu| \right)$$

et donc

$$l_{\mathbf{X}}(\mu) = -n \ln(2) - \sum_{i=1}^{n} |X_i - \mu|$$

et on obtient donc $\hat{\mu}_n^{MV} = X_{([n/2])}$. A noter que comme la densité est sympétrique, on a $F_{X_1}^{-1}(1/2) = \mu$ et F_{X_1} est strictement croissante en μ donc on a la consistance de m_n via le théorème du cours. De plus, on a, comme $f(\mu) = \frac{1}{2}$,

$$\sqrt{n}\,(m_n - \mu) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$