Polytech Année 2023/2024

L3 Premier semestre

Feuille de TD 1 : Décomposition LU

Exercice 1 : On considère

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Résoudre le problème $Ax = b$ avec la méthode de Gauss.

Solution de l'exercice 1 : On a

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 = L_2 + L_1 \\ L_3 = L_3 - 2L_1 \end{matrix} \qquad b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 = L_2 + L_1 \\ L_3 = L_3 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 = L_3 + L_2 \end{matrix} \qquad b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 = L_3 + L_2 \end{matrix}$$

On résout maintenant

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 4x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 4x_3 &= 10 \end{aligned} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} x_1 &= -9/4 \\ x_2 &= 1/4 \\ x_3 &= 5/2 \end{aligned} \right.$$

On a bien

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9/4 \\ 1/4 \\ 5/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = b$$

Exercice 2 : Dans cet exercice, l'objectif est de reprendre étape par étape la construction de la décomposition $A = LU$ puis de résoudre $Ax = b$ avec On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

1. Eliminer les 2ème et 3ème éléments de la premiere colonne de la matrice A en faisant des opération sur les lignes de A et obtenir ainsi la matrice $A^{(1)}$.

2. Calculer le vecteur de Gauss associé à cette étape.
3. En déduire $L^{(1)}$
4. Répeter cette opération pour obtenir une matrice diagonale supérieure $U = A^{(2)}$ et une matrice diagonale inférieure $L = L^{(2)}$.
5. Vérifier que vous avez bien $A = LU$.
6. Résoudre $Ly = b$ puis $Ux = y$. Calculer Ax. Que remarquez vous ?

Solution de l'exercice 2 :

1. On a
$$A^{(1)} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -13 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - {\color{red}2}L_1 \\ L_3 - {\color{red}3}L_1 \end{array} \end{array}$$

2. Le vecteur de Gauss est donné par
$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ {\color{red}2} \\ {\color{red}3} \end{pmatrix}$$

3. $L^{(1)}$ est donc donné par
$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ {\color{red}2} & 1 & 0 \\ {\color{red}3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. On a
$$U = A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad L_3 = L_3 - {\color{red}2}L_2$$

   et on a donc
$$\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ {\color{red}2} \end{pmatrix}$$

   et
$$L = L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & {\color{red}2} & 1 \end{pmatrix}$$

5. On a
$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

6. On résout $Ly = b$, i.e

$$\begin{cases} y_1 &= 1 \\ 2y_1 + y_2 &= 5 \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 &= 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 3 \\ y_3 = -3 \end{cases}$$

On résout maintenant $Ux = y$, i.e

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 7x_3 &= 1 \\ -3x_2 - 6x_3 &= 3 \\ -x_3 &= -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = -7 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

On a

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = b.$$

Ce résultat n'est pas surprenant car $Ax = LUx = Uy = b$.

Exercice 3 : On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Donner la décomposition $A = LU$.
2. En déduire le déterminant de A.

Solution de l'exercice 3 :

1. On a

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 + L_1 \\ L_3 + L_1 \\ \\ \end{array} \qquad L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 + L_2 \end{array} \qquad L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 - L_3 \end{array} \qquad L = L^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a bien

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = A$$

2. On a $\det(A) = \det(LU) = \det(L)\det(U) = 1$.

Exercice 4 : Donner la décomposition $PA = LU$ de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Attention aux permutations !

Solution de l'exercice 4 : Version 1 : On a

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 = L_3 \\ L_2 = L_2 \\ L_3 = L_1 \\ L_4 = L_4 + L_3 \end{matrix} \qquad L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 = L_3 - 2L_2 \\ L_4 = L_4 \end{matrix} \qquad L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 = L_4 - 2L_3 \end{matrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a donc $P = P^{(1)}$. On a

$$PA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = PA.$$

Version 2 : On va prendre à chaque fois le plus grand coefficient en pivot :

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 = L_3 \\ L_2 = L_2 \\ L_3 = L_1 \\ L_4 = L_4 + L_3 \end{matrix} \qquad L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 = L_3 \\ L_3 = L_2 - 1/2L_3 \\ L_4 = L_4 \end{matrix} \qquad L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_3 = L_4 \\ L_4 = L_3 + 1/4L_4 \end{matrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/4 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc $P = P^{(3)}P^{(2)}P^{(1)}$, i.e

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc

$$PA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = PA.$$

Exercice 5 : On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 10 \\ 1 & 10 & 18 \end{pmatrix}$$

1. Que remarquez vous ?
2. Faire la décomposition LU
3. Montrer que $U = DL^T$ avec
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
4. On déduire qu'il existe une matrice $\tilde{L}$ triangulaire inférieure telle que $A = \tilde{L}\tilde{L}^T$.

Solution de l'exercice 5 :

1. La matrice A est symétrique.
2. On a
$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 8 & 17 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$U = A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad L = L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

On a
$$DL^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U$$

En notant $\tilde{D}$ la "racine carrée" de D, i.e

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\tilde{L} = L\tilde{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$\tilde{L}$ est toujours triangulaire inférieure et on a $\tilde{L}\tilde{L}^T = L\tilde{D}\tilde{D}L^T = LDL^T = LU = A$. On peut également le vérifier par le calcul, i.e on a bien

$$\tilde{L}\tilde{L}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 10 \\ 1 & 10 & 18 \end{pmatrix}.$$

C'est ce que l'on appelle la décomposition de Choleski de A. Cela peut se faire pour toute matrice symétrique définie positive.