Feuille de TD 1 : Décomposition LU

Exercice 1 : On considère

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Résoudre le problème $Ax = b$ avec la méthode de Gauss.

Exercice 2 : Dans cet exercice, l'objectif est de reprendre étape par étape la construction de la décomposition $A = LU$ puis de résoudre $Ax = b$ avec On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

1. Eliminer les 2ème et 3ème éléments de la premiere colonne de la matrice A en faisant des opération sur les lignes de A et obtenir ainsi la matrice $A^{(1)}$.
2. Calculer le vecteur de Gauss associé à cette étape.
3. En déduire $L^{(1)}$
4. Répeter cette opération pour obtenir une matrice diagonale supérieure $U = A^{(2)}$ et une matrice diagonale inférieure $L = L^{(2)}$.
5. Vérifier que vous avez bien $A = LU$.
6. Résoudre $Ly = b$ puis $Ux = y$. Calculer Ax. Que remarquez vous ?

Exercice 3 : On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Donner la décomposition $A = LU$.
2. En déduire le déterminant de A.

Exercice 4 : Donner la décomposition $PA = LU$ de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Attention aux permutations !

Exercice 5 : On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 10 \\ 1 & 10 & 18 \end{pmatrix}$$

1. Que remarquez vous ?
2. Faire la décomposition LU
3. Montrer que $U = DL^T$ avec
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
4. On déduire qu'il existe une matrice $\tilde{L}$ triangulaire inférieure telle que $A = \tilde{L}\tilde{L}^T$.

Exercice 6 : On considère une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, symétrique et définie positive. On admettra que A admet une unique décomposition LU et que les éléments diagonaux de U sont strictement positifs (ce qui est effectivement le cas).

1. Montrer que A admet la décomposition
$$A = LDV$$
avec V triangulaire supérieur unitaire (dont tous les coefficients diagonaux valent 1) et D est diagonale, et tous les éléments diagonaux sont strictement positifs.
2. En déduire qu'il existe une matrice triangulaire inférieur M telle que
$$A = MM^T.$$

Exercice 7 : Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ une matrice dont les colonnes sont données par $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^m$ des vecteurs linéairement indépendants. Pour que cela soit possible, on remarque qu'il faut

$m \geq n$. On rappelle le procédé de Gram-Schmidt :

$$\begin{aligned}
v_1 &= a_1 \\
v_2 &= a_2 - \frac{\langle a_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 \\
v_3 &= a_3 - \sum_{i=1}^{2} \frac{\langle a_3, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i \\
&\vdots \\
v_n &= a_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle a_n, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i
\end{aligned}$$

et on prend ensuite $u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}, \ldots, u_n = \frac{v_n}{\|v_n\|}$. On rappelle que les vecteurs u_i sont alors orthogonaux deux à deux et de norme 1.

1. Montrer que la matrice Q dont les colonnes sont $u_1, \ldots, u_n$ est unitaire et orthogonale, i.e $Q^T Q = I_n$.
2. Soit R la matrice donnée par

$$R[i,j] = \begin{cases} \langle a_j, u_i \rangle & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Montrer que $A = QR$.
3. Faire la décomposition QR de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ -2 & 7 & -1 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$