Polytech | Année 2023/2024

L3 | Premier semestre

Feuille de TD 1 : Décomposition LU

Exercice 1 : On considère

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Résoudre le problème $Ax = b$ avec la méthode de Gauss.

Exercice 2 : Dans cet exercice, l'objectif est de reprendre étape par étape la construction de la décomposition $A = LU$ puis de résoudre $Ax = b$ avec On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

1. Eliminer les 2ème et 3ème éléments de la premiere colonne de la matrice A en faisant des opération sur les lignes de A et obtenir ainsi la matrice $A^{(1)}$.
2. Calculer le vecteur de Gauss associé à cette étape.
3. En déduire $L^{(1)}$
4. Répeter cette opération pour obtenir une matrice diagonale supérieure $U = A^{(2)}$ et une matrice diagonale inférieure $L = L^{(2)}$.
5. Vérifier que vous avez bien $A = LU$.
6. Résoudre $Ly = b$ puis $Ux = y$. Calculer Ax. Que remarquez vous ?

Exercice 3 : On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Donner la décomposition $A = LU$.
2. En déduire le déterminant de A.

Exercice 4 : Donner la décomposition $PA = LU$ de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Attention aux permutations !

Exercice 5 : On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 10 \\ 1 & 10 & 18 \end{pmatrix}$$

1. Que remarquez vous ?
2. Faire la décomposition LU
3. Montrer que $U = DL^T$ avec
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
4. On déduire qu'il existe une matrice $\tilde{L}$ triangulaire inférieure telle que $A = \tilde{L}\tilde{L}^T$.