

Feuille de TD 1 : Convergence de suites de variables aléatoires

Exercice 1.

1. Rappeler les définitions de la convergence en loi, en probabilité, presque sûre et en moyenne quadratique .
2. Montrer que la convergence en moyenne quadratique implique la convergence en probabilité.
3. Soit a une constante et (X_n) une suite de variables aléatoires. Montrer que si (X_n) converge en loi vers a , alors (X_n) converge en probabilité vers a .
4. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires convergeant en loi vers une constante a et soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $h(X_n)$ converge en probabilité vers $h(a)$.
5. Etudier la convergence de la suite (X_n) dans chacun des cas suivants :
 - $X_n = 1/n$.
 - $X_n = (-1)^n$.
 - $X_n = \mathbf{1}_{A_n}$ où A_n est une suite d'évènements et $\mathbb{P}[A_n]$ converge vers 0.
 - $X_n = Z_n \mathbf{1}_{B_n}$ où Z_n converge en loi vers une variable aléatoire Z et $\mathbb{P}[B_n]$ converge vers 1.

Exercice 2.

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, à valeurs dans un ensemble A . Soit $D \subset A$ tel que $p = \mathbb{P}[X_1 \in D] \neq 0$.

Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{X_j \in D\}}$.

1. Calculer $\mathbb{E}[S_n]$ et $\mathbb{V}[S_n]$.
2. Montrer que la suite $\frac{S_n}{n}$ converge presque sûrement vers p .
3. Calculer l'erreur quadratique moyenne $\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{n} - p\right)^2\right]$. En déduire une majoration uniforme en p de l'erreur quadratique moyenne.

4. Démontrer que pour tout $p \in]0, 1[$ et pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P} \left[\left| \frac{S_n}{n} - p \right| \geq \varepsilon \right] \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

5. Enoncer le théorème de limite centrale que satisfait la variable $\frac{S_n}{n}$.

Exercice 3.

Soient (X_n) et (Y_n) des suites de variables aléatoires, et X, Y des variables aléatoires. Montrer que :

1. Si X_n et Y_n convergent en probabilité vers X et Y , alors $X_n + Y_n$ converge en probabilité vers $X + Y$.
2. Si X_n et Y_n convergent presque sûrement vers X et Y , alors $X_n + Y_n$ converge presque sûrement vers $X + Y$.
3. Si X_n et Y_n convergent en moyenne quadratique vers X et Y , alors $X_n + Y_n$ converge en moyenne quadratique vers $X + Y$.

Exercice 4.

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires centrées, de même variance σ^2 et satisfaisant pour tout entiers $i \neq j$

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \sigma^2 \alpha^{|j-i|}$$

avec $\alpha \in (0, 1)$. Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

1. Calculer $\mathbb{E}[S_n]$.
2. (*) Montrer que

$$\mathbb{V}[S_n] = n\sigma^2 + \frac{2\alpha\sigma^2}{1-\alpha} \left((n-1) - \alpha \frac{1-\alpha^{n-1}}{1-\alpha} \right).$$

On rappellera que

$$\mathbb{V} \left[\sum_{i=1}^n X_i \right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}[X_i] + \sum_{i \neq j} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

3. En déduire la convergence en moyenne quadratique de S_n/n .

Exercice 5.

On considère une suite de variables aléatoires (X_n) . Dans chacun des cas suivants, donner la normalité asymptotique de $g(X_n)$.

1. $g : x \mapsto \sqrt{x}, \theta > 0$ et

$$\sqrt{n}(X_n - \theta^2) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

2. $g : x \mapsto x^{-1}, \theta \neq 0$ et

$$\sqrt{n} \left(X_n - \frac{1}{\theta} \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, \frac{1}{\theta^2} \right).$$

3. $g : x \longleftarrow e^x, \theta > 0$ et

$$\sqrt{n} (X_n - \ln(\theta)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N} (0, (\ln \theta)^2)$$

Exercice 6.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. Donner la loi de $Z = -\log(X)$.
2. Soit $Z_1, \dots, Z_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de même loi que Z . Donner la normalité asymptotique de $\bar{Z}_n$.
3. En déduire la normalité asymptotique de

$$Y_n = \frac{1}{(\prod_{i=1}^n X_i)^{1/n}}.$$

Exercice 7 – Loi exponentielle translatée.

Soit Y une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1, i.e de densité f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \exp(-x) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$$

Soit θ , on considère la variable aléatoire $X = Y + \theta$ de densité

$$f_\theta(x) = \exp(-(x - \theta)) \mathbf{1}_{[\theta, +\infty[}(x).$$

1. Donner les fonctions de répartition des variables X et Y .
2. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X . On considère la variable aléatoire $Z_n = \min_{i=1, \dots, n} X_i$. Donner la fonction de répartition de Z_n .
3. En déduire que Z_n converge en probabilité vers θ .
4. Montrer que la variable $n(Z_n - \theta)$ suit une loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice 8 – Inégalité de Hölder.

L'objectif de cette exercice est de démontrer l'inégalité de Hölder "généralisée" suivante. Soient $p, q, r > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, et X, Y deux variables aléatoires admettant respectivement un

moment d'ordre p et q . Alors

$$(\mathbb{E} [|XY|^r])^{\frac{1}{r}} \leq (\mathbb{E} [|X|^p])^{\frac{1}{p}} (\mathbb{E} [|Y|^q])^{\frac{1}{q}}.$$

1. Montrer que pour tout $a, b \geq 0$

$$\frac{1}{r}(ab)^r \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

2. En déduire l'inégalité de Hölder.
3. Soit (X_n) (Y_n) deux suites de variables aléatoires convergeant vers 0 respectivement à l'ordre $p > 2$ et $\frac{2p}{p-2}$, i.e

$$\mathbb{E} [|X_n|^p] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E} \left[|Y_n|^{\frac{2p}{p-2}} \right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Montrer que $X_n Y_n$ converge en moyenne quadratique vers 0.