Mise à niveau Feuille de TD 1

Exercice 1 :

1. Rappeler les définitions de la convergence en loi, en probabilité, presque sûre et en moyenne quadratique .
2. Montrer que la convergence en moyenne quadratique implique la convergence en probabilité.
3. Soit a une constante et (X_n) une suite de variables aléatoires. Montrer que si (X_n) converge en loi vers a , alors (X_n) converge en probabilité vers a .
4. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires convergeant en loi vers une constante a et soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $h(X_n)$ converge en probabilité vers $h(a)$.
5. Etudier la convergence de la suite (X_n) dans chacun des cas suivants :
 - $X_n = 1/n$.
 - $X_n = (-1)^n$.
 - $X_n = \mathbf{1}_{A_n}$ où A_n est une suite d'évènements et $\mathbb{P}[A_n]$ converge vers 0.
 - $X_n = Z_n \mathbf{1}_{B_n}$ où Z_n converge en loi vers une variable aléatoire Z et $\mathbb{P}[B_n]$ converge vers 1.

Exercice 2 : Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. Donner la loi de $Z = -\log(X)$.
2. Soit $Z_1, \dots, Z_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de même loi que Z . Donner la normalité asymptotique de $\bar{Z}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i$.
3. En déduire la normalité asymptotique de

$$Y_n = \frac{1}{(\prod_{i=1}^n X_i)^{1/n}}.$$

Exercice 3 : (Inégalité de Hoeffding simplifiée) Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et centrées. L'objectif est de montrer que si $|X_n| \leq M$ p.s, alors pour tout $x > 0$,

$$\mathbb{P}[\bar{X}_n > x] \leq \exp\left(-\frac{nx^2}{2M^2}\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}[|\bar{X}_n| > x] \leq 2 \exp\left(-\frac{nx^2}{2M^2}\right).$$

1. Soit $\lambda > 0$ et $x \in [-M, M]$, montrer que

$$\exp(\lambda x) \leq \frac{M-x}{2M} \exp(-\lambda M) + \frac{x+M}{2M} \exp(\lambda M).$$

2. Sachant que pour tout $u > 0$, $\cosh(u) \leq \exp(u^2/2)$, en déduire que pour tout i ,

$$\mathbb{E}[\exp(\lambda X_i)] \leq \cosh(\lambda M) \leq \exp(\lambda^2 M^2/2).$$

3. Montrer que pour tout $\lambda > 0$ et $x > 0$,

$$\mathbb{P}[\bar{X}_n > x] \leq \exp\left(n\left(\frac{\lambda^2 M^2}{2} - \lambda x\right)\right)$$

et conclure.

Exercice 4 : inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité de Hölder.

1. Inégalité de Cauchy-Schwarz :

(a) Soit X, Y deux variables aléatoires admettant des moments d'ordre 2. Montrer l'inégalité de Cauchy Schwarz

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]} \sqrt{\mathbb{E}[Y^2]}$$

(b) Soit (X_n) et (Y_n) deux suites de variables aléatoires convergeant à l'ordre 4 vers 0. En déduire que $X_n Y_n$ converge en moyenne quadratique vers 0.

2. Inégalité de Hölder :

(a) Soient $a, b \geq 0$ et $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q.$$

(b) En déduire l'inégalité de Hölder :

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq (\mathbb{E}[X^p])^{\frac{1}{p}} (\mathbb{E}[Y^q])^{\frac{1}{q}}.$$

(c) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires convergeant vers 0 à l'ordre r avec $2 < r < 4$ et (Y_n) une suite de variables aléatoires convergeant vers 0 à l'ordre $\frac{2r}{r-2}$. Montrer $X_n Y_n$ converge en moyenne quadratique vers 0.

Exercice 5 : (loi géométrique) Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p , i.e pour tout entier $k \geq 1$, $\mathbb{P}[X = k] = (1-p)^{k-1} p$.

1. Rappeler l'espérance et la variance de X .

2. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X . Par la méthode des moments, donner un estimateur $\hat{p}_n$ de p .

3. Est-il consistant? Fortement consistant? Asymptotiquement normal?
4. Donner l'estimateur $\hat{p}_n^{MV}$ du maximum de vraisemblance de p . Que pouvez vous en conclure?

Exercice 6 : (loi de Poisson) On considère une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre θ .

1. Soit $(X_1, \dots, X_n)$ i.i.d de même loi que X . A l'aide de la méthode des moments, proposer un estimateur de θ .
2. Est-il consistant? Fortement consistant? Asymptotiquement normal?
3. Donner l'estimateur du maximum de vraisemblance.
4. Est-il consistant? Fortement consistant? Asymptotiquement normal?

Exercice 7 (loi exponentielle translatée) : Soit Y une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1, i.e de densité f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \exp(-x) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

Soit θ , on considère la variable aléatoire $X = Y + \theta$ de densité

$$f_\theta(x) = \exp(-(x - \theta)) \mathbf{1}_{[\theta, +\infty[}(x).$$

1. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{V}[X]$.
2. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X . Par la méthode des moments, donner un estimateur $\hat{\theta}_n$ de θ . Cet estimateur est-il consistant? Fortement consistant? Sans biais?
3. Donner la normalité asymptotique de $\hat{\theta}_n$.
4. Donner l'erreur quadratique moyenne de $\hat{\theta}_n$.
5. Donner l'estimateur $\hat{\theta}_n^{MV}$ du maximum de vraisemblance.
6. Donner la loi de $n(\hat{\theta}_n^{MV} - \theta)$.
7. Calculer la médiane de X_1 et en déduire un nouvel estimateur de θ . Est-il consistant? asymptotiquement normal?
8. Quel estimateur choisiriez vous?

Exercice 8 : Loi de Laplace

1. Soient $X_1, \dots, X_n$ i.i.d de densité donnée pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_\theta(x) = \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{|x|}{\theta}},$$

avec $\theta > 0$. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ . Est-il unique? Consistant? Asymptotiquement normal?

2. Soit $X_1, \dots, X_n$ i.i.d de densité donnée pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_\mu(x) = \frac{1}{2}e^{-|x-\mu|},$$

avec $\mu \in \mathbb{R}$. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de μ . Est-il unique? Consistant? Asymptotiquement normal?