Sorbonne Université — Année 2023/2024

M2 Statistique — Premier semestre

# Mise à niveau
# Feuille de TD 1

**Exercice 1 :**

1. Rappeler les définitions de la convergence en loi, en probabilité, presque sûre et en moyenne quadratique .
2. Montrer que la convergence en moyenne quadratique implique la convergence en probabilité.
3. Soit $a$ une constante et $(X_n)$ une suite de variables aléatoires. Montrer que si $(X_n)$ converge en loi vers $a$, alors $(X_n)$ converge en probabilité vers $a$.
4. Soit $(X_n)$ une suite de variables aléatoires convergeant en loi vers une constante $a$ et soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $h(X_n)$ converge en probabilité vers $h(a)$.
5. Etudier la convergence de la suite $(X_n)$ dans chacun des cas suivants :
   — $X_n = 1/n$.
   — $X_n = (-1)^n$.
   — $X_n = \mathbf{1}_{A_n}$ où $A_n$ est une suite d'évènements et $\mathbb{P}[A_n]$ converge vers 0.
   — $X_n = Z_n \mathbf{1}_{B_n}$ où $Z_n$ converge en loi vers une variable aléatoire $Z$ et $\mathbb{P}[B_n]$ converge vers 1.

**Exercice 2 :** Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Donner la loi de $Z = -\log(X)$.
2. Soit $Z_1, ..., Z_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de même loi que $Z$. Donner la normalité asymptotique de $\overline{Z}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i$.
3. En déduire la normalité asymptotique de

$$Y_n = \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)^{1/n}}.$$

**Exercice 3 : (Inégalité de Hoeffding simplifiée)** Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et centrées. L'objectif est de montrer que si $|X_n| \leq M$ p.s, alors pour tout $x > 0$,

$$\mathbb{P}\left[\overline{X}_n > x\right] \leq \exp\left(-\frac{nx^2}{2M^2}\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left[\left|\overline{X}_n\right| > x\right] \leq 2\exp\left(-\frac{nx^2}{2M^2}\right).$$

1. Soit $\lambda > 0$ et $x \in [-M, M]$, montrer que

$$\exp(\lambda x) \leq \frac{M-x}{2M} \exp(-\lambda M) + \frac{x+M}{2M} \exp(\lambda M).$$

2. Sachant que pour tout $u > 0$, $\cosh(u) \leq \exp(u^2/2)$, en déduire que pour tout $i$,

$$\mathbb{E}\left[\exp(\lambda X_i)\right] \leq \cosh(\lambda M) \leq \exp\left(\lambda^2 M^2/2\right).$$

3. Montrer que pour tout $\lambda > 0$ et $x > 0$,

$$\mathbb{P}\left[\overline{X}_n > x\right] \leq \exp\left(n\left(\frac{\lambda^2 M^2}{2} - \lambda x\right)\right)$$

et conclure.

**Exercice 4 : inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité de Hölder.**

1. **Inégalité de Cauchy-Schwarz :**
   (a) Soit $X, Y$ deux variables aléatoires admettant des moments d'ordre 2. Montrer l'inégalité de Cauchy Schwarz

   $$\mathbb{E}\left[|XY|\right] \leq \sqrt{\mathbb{E}\left[X^2\right]}\sqrt{\mathbb{E}\left[Y^2\right]}$$

   (b) Soit $(X_n)$ et $(Y_n)$ deux suites de variables aléatoires convergeant à l'ordre 4 vers 0. En déduire que $X_n Y_n$ converge en moyenne quadratique vers 0.
2. Inégalité de Hölder :
   (a) Soient $a, b \geq 0$ et $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que

   $$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q.$$

   (b) En déduire l'inégalité de Hölder :

   $$\mathbb{E}\left[|XY|\right] \leq \left(\mathbb{E}\left[X^p\right]\right)^{\frac{1}{p}} \left(\mathbb{E}\left[Y^q\right]\right)^{\frac{1}{q}}.$$

   (c) Soit $(X_n)$ une suite de variables aléatoires convergeant vers 0 à l'ordre $r$ avec $2 < r < 4$ et $(Y_n)$ une suite de variables aléatoires convergeant vers 0 à l'ordre $\frac{2r}{r-2}$. Montrer $X_n Y_n$ converge en moyenne quadratique vers 0.

**Exercice 5 : (loi géométrique)** Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p$, i.e pour tout entier $k \geq 1$, $\mathbb{P}[X = k] = (1-p)^{k-1} p$.

1. Rappeler l'espérance et la variance de $X$.
2. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que $X$. Par la méthode des moments, donner un estimateur $\hat{p}_n$ de $p$.

3. Est-il consistant ? Fortement consistant ? Asymptotiquement normal ?
4. Donner l'estimateur $\hat{p}_n^{MV}$ du maximum de vraisemblance de $p$. Que pouvez vous en conclure ?

**Exercice 6 : (loi de Poisson)** On considère une variable aléatoire $X$ suivant une loi de Poisson de paramètre $\theta$.

1. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ i.i.d de même loi que $X$. A l'aide de la méthode des moments, proposer un estimateur de $\theta$.
2. Est-il consistant ? Fortement consistant ? Asymptotiquement normal ?
3. Donner l'estimateur du maximum de vraisembance.
4. Est-il consistant ? Fortement consistant ? Asymptotiquement normal ?

**Exercice 7 (loi exponentielle translatée) :** Soit $Y$ une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1, i.e de densité $f$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \exp(-x) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

Soit $\theta$, on considère la variable aléatoire $X = Y + \theta$ de densité

$$f_\theta(x) = \exp(-(x-\theta)) \mathbf{1}_{[\theta,+\infty[}(x).$$

1. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{V}[X]$.
2. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que $X$. Par la méthode des moments, donner un estimateur $\hat{\theta}_n$ de $\theta$. Cet estimateur est-il consistant ? Fortement consistant ? Sans biais ?
3. Donner la normalité asymptotique de $\hat{\theta}_n$.
4. Donner l'erreur quadratique moyenne de $\hat{\theta}_n$.
5. Donner l'estimateur $\hat{\theta}_n^{MV}$ du maximum de vraisemblance.
6. Donner la loi de $n\left(\hat{\theta}_n^{MV} - \theta\right)$.
7. Calculer la médiane de $X_1$ et en déduire un nouvel estimateur de $\theta$. Est-il consistant ? asymptotiquement normal ?
8. Quel estimateur choisiriez vous ?

**Exercice 8 : Loi de Laplace**

1. Soient $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d de densité donnée pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_\theta(x) = \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{|x|}{\theta}},$$

avec $\theta > 0$. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de $\theta$. Est-il unique ? Consistant ? Asymptotiquement normal ?

2. Soit $X_1, \dots, X_n$ i.i.d de densité donnée pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_\mu(x) = \frac{1}{2} e^{-|x-\mu|},$$

avec $\mu \in \mathbb{R}$. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de $\mu$. Est-il unique ? Consistant ? Asymptotiquement normal ?