Sorbonne Université   Année 2025/2026

L3   Deuxième semestre

Examen partiel de statistique

Exercice 1 : Questions de cours :

1. Donner la définition du biais et de l'erreur quadratique moyenne d'un estimateur.
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $\hat{\theta}_n$ un estimateur admettant un moment d'ordre 2. Démontrer la décomposition biais variance suivante :

$$\mathrm{EQM}\left(\hat{\theta}_n, \theta\right) = B\left(\hat{\theta}_n, \theta\right)^2 + \mathbb{V}\left[\hat{\theta}_n\right].$$

Exercice 2 : On considère des X_i i.i.d suivant une loi de Rademacher de paramètre $\theta \in (0,1)$, i.e on a

$$\mathbb{P}\left[X_1 = 1\right] = \theta \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}\left[X_1 = -1\right] = 1 - \theta.$$

1. Montrer que
$$\mathbb{E}\left[X_1\right] = 2\theta - 1 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}\left[X_1\right] = 4\theta(1-\theta).$$
2. Proposer un estimateur à l'aide de la méthode de moments.
3. Montrer qu'il est consistant.
4. Montrer qu'il est asymptotiquement normal.
5. En déduire un intervalle de confiance asymptotique de niveau $1-\alpha$ avec $\alpha \in (0,1)$.
6. Montrer que la densité $f_\theta(.)$ de X_1 peut s'écrire pour tout $x \in \{-1,1\}$ de la forme
$$f_\theta(x) = \theta^{\frac{x+a}{2}}(1-\theta)^{\frac{a-x}{2}}$$
pour un choix approprié de a.
7. Donner l'estimateur du maximum de vraisemblance.

Exercice 3 : On considère des variables aléatoires X_i indépendantes et $\theta > 0$ tels que pour tout $i \geq 1$,

$$\mathbb{E}\left[X_i\right] = \frac{i+1}{i}\theta \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}\left[X_i\right] = \left(\frac{i+1}{i}\right)^2 \theta^2$$

L'objectif est d'estimer le paramètre θ. Dans ce qui suit, on considère l'estimateur $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

1. Calculer son biais.
2. Calculer son erreur quadratique moyenne.

3. Montrer qu'il converge en probabilité. On admettra

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq 1 + \log(n) \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \leq 2.$$

4. On considère maintenant l'estimateur $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{i+1} X_i$. Calculer son biais et son erreur quadratique moyenne.

5. Quel estimateur choisiriez vous ?