Sorbonne Université — Année 2020/2021

L3 — Deuxième semestre

Examen de statistique

Exercice 1 : (3 points) Questions de cours :

1. (0.5+0.5pts) Donner la définition du biais et de l'erreur quadratique moyenne d'un estimateur.
2. (2pts) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $\hat{\theta}_n$ un estimateur admettant un moment d'ordre 2. Montrer que

$$\mathrm{EQM}\left(\hat{\theta}_n, \theta\right) = B\left(\hat{\theta}_n, \theta\right)^2 + \mathbb{V}\left[\hat{\theta}_n\right].$$

Exercice 2 : (4 points) Dans chacun des cas suivants, donner la normalité asymptotique de $\hat{\theta}_n$:

1. (2pts) $\theta > 0$, $\hat{\theta}_n = \frac{1}{\overline{X}_n}$ et

$$\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \frac{1}{\theta}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\theta^2}\right).$$

2. (2pts) $\theta > 0$, $\hat{\theta}_n = \frac{1}{\overline{X}_n^3}$ et

$$\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \theta^{-1/3}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Exercice 3 : (13 points) Soit $\theta > 0$. On considère une variable aléatoire X ayant pour densité

$$f_\theta(x) = 2e^{2\theta}e^{-2x}\mathbf{1}_{x\geq\theta}$$

Dans tout ce qui suit, on considère $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d de même loi que X.

1. (2pts) Montrer que $\mathbb{E}[X] = \theta + \frac{1}{2}$ et $\mathbb{V}[X] = \frac{1}{4}$.
2. (1pt) Par la méthode des moments, donner un estimateur $\hat{\theta}_n$ de θ.
3. (1pt) L'estimateur $\hat{\theta}_n$ est-il consistant ?
4. (2pt) L'estimateur $\hat{\theta}_n$ est-il asymptotiquement normal ?
5. (2pt) Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance est $X_{(1)} = \min_{i=1,\ldots,n} X_i$.
6. (1pt) Montrer que la fonction de répartition F_X de X est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2(x-\theta)} & \text{si } x \geq \theta \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

7. (2pts) En déduire la consistance de $X_{(1)}$.
8. (2pts) Montrer que $n\left(X_{(1)} - \theta\right) \sim \mathcal{E}(2)$, avec $\mathcal{E}$ la loi exponentielle.