

Feuille de TD 2 : Estimation

Exercice 1 – estimation de la moyenne et de la variance.

Soit X une variable aléatoire de moyenne μ et de variance σ^2 inconnues. Soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X .

1. Rappeler l'estimateur de la moyenne. Montrer qu'il est sans biais, fortement consistant et donner son erreur quadratique moyenne ainsi que sa normalité asymptotique.

On a $\bar{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$, et par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E} [\bar{X}_n] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} [X_i] = \mu.$$

En utilisant la décomposition biais-variance et comme les X_i sont indépendants,

$$\mathbb{E} [(\bar{X}_n - \mu)^2] = \mathbb{V} [\bar{X}_n] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{V} [X_i] = \frac{1}{n} \sigma^2.$$

Par la loi forte des grands nombres, on a la convergence p.s et donc en probabilité, et on a le TLC

$$\sqrt{n} (\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

2. On souhaite maintenant estimer σ^2 . On propose l'estimateur suivant :

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}_n^2.$$

Expliquer ce choix.

Comme $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E} [(X - \mu)^2]$, un estimateur naturel de la variance aurait été

$$V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2,$$

mais comme μ est inconnu, on le remplace par son estimateur.

3. Montrer que

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - (\bar{X}_n - \mu)^2.$$

On fait apparaître μ et on obtient

$$\begin{aligned} n\hat{\sigma}_n^2 &= \sum_{i=1}^n ((X_i - \mu) + (\mu - \bar{X}_n))^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 + 2 \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) (\mu - \bar{X}_n) + \sum_{i=1}^n (\mu - \bar{X}_n)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 + 2 (\mu - \bar{X}_n) \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) + n (\mu - \bar{X}_n)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 + 2 (\mu - \bar{X}_n) n (\bar{X}_n - \mu) + n (\mu - \bar{X}_n)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - n (\mu - \bar{X}_n)^2. \end{aligned}$$

4. Soit $\tau^4 = \mathbb{E}[(X - \mu)^4]$. A l'aide du Théorème de Slutsky, donner la normalité asymptotique de $\hat{\sigma}_n^2$.

A noter que l'on peut réécrire l'égalité précédente comme

$$\sqrt{n} (\hat{\sigma}_n - \sigma^2) = \sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - \sigma^2 \right) - \sqrt{n} (\mu - \bar{X}_n)^2$$

On va appliquer le TLC au premier terme de la décomposition précédente, et montrer que le deuxième est négligeable. Le TLC nous donne

$$\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - \sigma^2 \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \tau^4 - \sigma^4)$$

On traite maintenant le terme

$$\sqrt{n} (\bar{X}_n - \mu)^2 = (\sqrt{n} (\bar{X}_n - \mu)) (\bar{X}_n - \mu).$$

Grâce au TLC, on a

$$\sqrt{n} (\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

1ère version : Slutsky. Comme $\bar{X}_n - \mu$ converge en probabilité vers 0, on obtient que à l'aide du Théorème de Slutsky

$$\sqrt{n} (\bar{X}_n - \mu)^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} 0$$

et en particulier on obtient la convergence en probabilité. Donc, à l'aide du Théorème de

Slutsky, on obtient

$$\sqrt{n} (\hat{\sigma}_n^2 - \sigma^2) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N} (0, \tau^4 - \sigma^4).$$

2ème version : Markov En utilisant l'inégalité de Markov, on a pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P} \left[\sqrt{n} (\bar{X}_n - \mu)^2 \geq \epsilon \right] \leq \frac{\sqrt{n} \mathbb{E} \left[(\bar{X}_n - \mu)^2 \right]}{\epsilon} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{n} \epsilon},$$

et on a donc la convergence en probabilité.

5. Calculer $\mathbb{E} [\hat{\sigma}_n^2]$. L'estimateur $\hat{\sigma}_n^2$ est-il sans biais ?

Par linéarité de l'espérance et en utilisant la décomposition précédent, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\hat{\sigma}_n^2] &= \mathbb{E} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - (\bar{X}_n - \mu)^2 \right] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} [(X_i - \mu)^2] - \mathbb{E} [(\bar{X}_n - \mu)^2] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{V} [X_i] - \mathbb{V} [\bar{X}_n] \\ &= \frac{n-1}{n} \sigma^2. \end{aligned}$$

L'estimateur est donc biaisé mais asymptotiquement sans biais.

6. En déduire un estimateur sans biais de σ^2 et donner sa normalité asymptotique.

On propose

$$S_n^2 = \frac{n}{n-1} \hat{\sigma}_n^2.$$

On obtient par linéarité $\mathbb{E} [S_n^2] = \frac{n}{n-1} \mathbb{E} [\hat{\sigma}_n^2] = \sigma^2$. De plus on obtient la normalité asymptotique par le Théorème de Slutsky. Plus précisément,

$$\sqrt{n} (S_n^2 - \sigma^2) = \sqrt{n} \left(\frac{n}{n-1} \hat{\sigma}_n^2 - \sigma^2 \right) = \sqrt{n} (\hat{\sigma}_n^2 - \sigma^2) + \frac{\sqrt{n}}{n-1} \hat{\sigma}_n^2$$

On a donc la convergence en loi du premier terme sur la droite de l'égalité précédente, et comme $\hat{\sigma}_n^2$ converge en probabilité vers σ^2 et $\frac{\sqrt{n}}{n-1}$ converge vers 0, le second terme converge en probabilité vers 0.

Exercice 2 – Estimation de la covariance.

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles d'espérances respectives μ_X, μ_Y et de variances respectives σ_X^2, σ_Y^2 . On s'intéresse ici à l'estimation de la covariance C de X, Y , définie

par

$$C = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

Soient $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ des couples de variables aléatoires indépendants et de même loi que (X, Y) . On s'intéresse à l'estimateur C_n défini par

$$C_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n) (Y_i - \bar{Y}_n).$$

1. Justifier la proposition de cet estimateur.

Un estimateur naturel aurait été

$$\text{Cov}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_X) (Y_i - \mu_Y)$$

mais comme μ_X et μ_Y sont inconnues, on les remplace par leurs estimateurs respectifs.

2. Montrer que

$$\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}_n) (Y_j - \bar{Y}_n) = \sum_{j=1}^n (X_j - \mu_X) (Y_j - \mu_Y) - n (\bar{X}_n - \mu_X) (\bar{Y}_n - \mu_Y).$$

On va faire apparaître μ_X et μ_Y et on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}_n) (Y_j - \bar{Y}_n) &= \sum_{j=1}^n ((X_j - \mu_X) + (\mu_X - \bar{X}_n)) ((Y_j - \mu_Y) + (\mu_Y - \bar{Y}_n)) \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_X) (Y_i - \mu_Y) + \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_X) (\mu_Y - \bar{Y}_n) + \sum_{i=1}^n (\mu_X - \bar{X}_n) (Y_i - \mu_Y) + \sum_{i=1}^n (\mu_X - \bar{X}_n) (\mu_Y - \bar{Y}_n) \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_X) (Y_i - \mu_Y) + (\mu_Y - \bar{Y}_n) \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_X) + (\mu_X - \bar{X}_n) \sum_{i=1}^n (Y_i - \mu_Y) + n (\mu_X - \bar{X}_n) (\mu_Y - \bar{Y}_n) \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_X) (Y_i - \mu_Y) + n (\mu_Y - \bar{Y}_n) (\bar{X}_n - \mu_X) + n (\mu_X - \bar{X}_n) (\bar{Y}_n - \mu_Y) + n (\mu_X - \bar{X}_n) (\mu_Y - \bar{Y}_n) \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_X) (Y_i - \mu_Y) - n (\bar{X}_n - \mu_X) (\bar{Y}_n - \mu_Y). \end{aligned}$$

3. Montrer que

$$n^2 (\bar{X}_n - \mu_X) (\bar{Y}_n - \mu_Y) = \sum_{j=1}^n (X_j - \mu_X) (Y_j - \mu_Y) + \sum_{i \neq j} (X_i - \mu_X) (Y_j - \mu_Y).$$

On a

$$\begin{aligned}
n^2 (\bar{X}_n - \mu_X) (\bar{Y}_n - \mu_Y) &= \left(\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_X) \right) \left(\sum_{i=1}^n (Y_i - \mu_Y) \right) \\
&= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_X) (Y_i - \mu_Y) + \sum_{i \neq j} (X_i - \mu_X) (Y_j - \mu_Y).
\end{aligned}$$

4. Calculer $\mathbb{E}[C_n]$. Que pouvez vous en déduire?

Par linéarité de l'espérance et en utilisant la décomposition de la question 2, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[C_n] &= \mathbb{E} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_X) (Y_i - \mu_Y) - (\bar{X}_n - \mu_X) (\bar{Y}_n - \mu_Y) \right] \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} [(X_i - \mu_X) (Y_i - \mu_Y)] - \mathbb{E} [(\bar{X}_n - \mu_X) (\bar{Y}_n - \mu_Y)] \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C - \frac{1}{n^2} \mathbb{E} [n^2 (\bar{X}_n - \mu_X) (\bar{Y}_n - \mu_Y)]
\end{aligned}$$

En utilisant la décomposition de la question 3 et comme les couples (X_i, Y_i) sont indépendants, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [n^2 (\bar{X}_n - \mu_X) (\bar{Y}_n - \mu_Y)] &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_X) (Y_i - \mu_Y) + \sum_{i \neq j} (X_i - \mu_X) (Y_j - \mu_Y) \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} [(X_i - \mu_X) (Y_i - \mu_Y)] + \sum_{i \neq j} \mathbb{E} [(X_i - \mu_X) (Y_j - \mu_Y)] \\
&= \sum_{i=1}^n C + \sum_{i \neq j} \text{Cov}(X_i, Y_j) \\
&= nC.
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\mathbb{E}[C_n] = \frac{n-1}{n} C.$$

5. Proposer un estimateur sans biais de C . On a donc

$$\hat{C}_n = \frac{n}{n-1} C_n.$$

6. En posant $Z_j = (X_j - \mu_X) (Y_j - \mu_Y)$, montrer que C_n converge presque sûrement vers C .

On a

$$C_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i - (\bar{X}_n - \mu_X) (\bar{Y}_n - \mu_Y).$$

Par la loi forte des grands nombres, le premier terme converge presque sûrement vers C , tandis que le deuxième converge presque sûrement vers 0 (car \bar{X}_n et \bar{Y}_n convergent presque sûrement vers μ_X et μ_Y).

7. Montrer, soit à l'aide des inégalités de Markov et de Cauchy-Schwarz, soit à l'aide du théorème de Slutsky, que

$$\sqrt{n} (\bar{X}_n - \mu_X) (\bar{Y}_n - \mu_Y) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

Version Markov : Comme pour toutes constantes positives a, b , on a $ab \leq 2^{-1}a^2 + 2^{-1}b^2$, on obtient

$$\mathbb{E} [\sqrt{n} |(\bar{X}_n - \mu_X) (\bar{Y}_n - \mu_Y)|] \leq \sqrt{n} \frac{1}{2} \mathbb{E} [(\bar{X}_n - \mu_X)^2] + \sqrt{n} \frac{1}{2} \mathbb{E} [(\bar{Y}_n - \mu_Y)^2] = \frac{\sigma_X^2}{2\sqrt{n}} + \frac{\sigma_Y^2}{2\sqrt{n}}.$$

En appliquant l'inégalité de Markov, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} [\sqrt{n} |(\bar{X}_n - \mu_X) (\bar{Y}_n - \mu_Y)| \geq \epsilon] &\leq \frac{1}{\epsilon} \mathbb{E} [\sqrt{n} |(\bar{X}_n - \mu_X) (\bar{Y}_n - \mu_Y)|] \\ &\leq \frac{\sigma_X^2}{2\sqrt{n}\epsilon} + \frac{\sigma_Y^2}{2\sqrt{n}\epsilon}. \end{aligned}$$

Version Markov + Cauchy-Schwarz : En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\sqrt{n} |(\bar{X}_n - \mu_X) (\bar{Y}_n - \mu_Y)|] &\leq \sqrt{n} \sqrt{\mathbb{E} [|\bar{X}_n - \mu_X|^2]} \sqrt{\mathbb{E} [|\bar{Y}_n - \mu_Y|^2]} \\ &= \sqrt{n} \frac{\sigma_X \sigma_Y}{n}. \end{aligned}$$

Version Slutsky : On a

$$\sqrt{n} (\bar{X}_n - \mu_X) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_X^2) \quad \text{et} \quad \bar{Y}_n - \mu_Y \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0,$$

et donc en appliquant le théorème de Slutsky, on a la convergence en loi vers 0 et donc la convergence en probabilité.

8. Soit $\tau^4 = \mathbb{E} [(X - \mu_X)^2 (Y - \mu_Y)^2] < +\infty$. Donner la normalité asymptotique de C_n , et en déduire celle de l'estimateur sans biais.

Il suffit juste d'appliquer le TLC à \bar{Z}_n et le Théorème de Slutsky : on a

$$\sqrt{n} (C_n - C) = \sqrt{n} (\bar{Z}_n - C) - \sqrt{n} (\bar{X}_n - \mu_X) (\bar{Y}_n - \mu_Y).$$

Or les Z_i sont iid avec $\mathbb{E} [Z_1] = C$ et $\mathbb{V} [Z_1] = \tau^4 - C^2$. Le TLC nous donne donc

$$\sqrt{n} (C_n - C) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \tau^4 - C^2).$$

De plus, le TLC nous donne également

$$\sqrt{n} (\bar{X}_n - \mu_X) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_X^2)$$

et la loi des grands nombres nous donne

$$\bar{Y}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} \mu_Y.$$

Ainsi Slutsky appliqué une première fois nous donne

$$\sqrt{n} (\bar{X}_n - \mu_X) (\bar{Y}_n - \mu_Y) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0,$$

et en appliquant Slutsky une deuxième fois, on obtient

$$\sqrt{n} (C_n - C) = \sqrt{n} (\bar{Z}_n - C) - \sqrt{n} (\bar{X}_n - \mu_X) (\bar{Y}_n - \mu_Y) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \tau^4 - C^2).$$

Exercice 3 – Méthode des moments.

Soit $\theta \in \Theta$ où Θ est un ouvert de \mathbb{R} , et $\varphi : \Theta \rightarrow \varphi(\Theta)$ un C^1 -difféomorphisme. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\mathbb{E} [X^k] = \varphi(\theta).$$

De plus, on suppose que X admet un moment d'ordre $2k$.

1. Soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de même loi que X . Proposer un estimateur de $\varphi(\theta)$.

$$\hat{\varphi}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$$

2. Est-il consistant? Asymptotiquement normal?

La consistance est une application directe de la LGN en posant $Y_i = X_i^k$. On note $\sigma_k^2 = \mathbb{V} [X^k]$, et on a

$$\sqrt{n} (\hat{\varphi}_n - \varphi(\theta)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_k^2).$$

3. En déduire un estimateur de θ .

$$\hat{\theta}_n = \varphi^{-1}(\hat{\varphi}_n).$$

4. Est-il consistant?

Comme φ^{-1} est continue, on obtient la consistance via le théorème de continuité.

5. On suppose que $\varphi'(\theta) \neq 0$. En déduire la normalité asymptotique de l'estimateur de θ .

Comme $(\varphi^{-1})'(x) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}$, on a

$$(\varphi^{-1})'(\varphi(\theta)) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(\varphi(\theta)))} = \frac{1}{\varphi'(\theta)}.$$

On obtient donc, en appliquant la Delta méthode

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_k^2}{(\varphi'(\theta))^2}\right).$$

Exercice 4 – Loi géométrique.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p , i.e pour tout entier $k \geq 1$, $\mathbb{P}[X = k] = (1 - p)^{k-1}p$.

1. Rappeler l'espérance et la variance de X .

On a $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$ et $\mathbb{V}[X] = \frac{1-p}{p^2}$.

2. Soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X . Par la méthode des moments, donner un estimateur \hat{p}_n de p .

Comme $\mathbb{E}[X] = p^{-1}$, \bar{X}_n converge vers p^{-1} et on propose donc l'estimateur $\hat{p}_n = \bar{X}_n^{-1}$.

3. Est-il consistant? Fortement consistant? Asymptotiquement normal?

Comme \bar{X}_n converge presque sûrement (LFGN) vers p^{-1} et comme la fonction $g : x \mapsto x^{-1}$ est continue en $p^{-1} \neq 0$, on obtient la convergence presque sûre à l'aide du théorème de continuité. De plus, comme

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - p^{-1}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1-p}{p^2}\right),$$

et comme $g'(p^{-1}) = p^2$, on obtient à l'aide de la delta-méthode

$$\sqrt{n}(\hat{p}_n - p) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, p^2(1-p)).$$

4. Donner l'estimateur \hat{p}_n^{MV} du maximum de vraisemblance de p . Que pouvez vous en conclure?

On a la vraisemblance qui est définie pour tout p par

$$L_n(p) = \prod_{i=1}^n (1-p)^{X_i-1} p = p^n \prod_{i=1}^n (1-p)^{X_i-1}$$

On obtient donc la log-vraisemblance

$$\begin{aligned}\ell_n(p) &= \ln(p^n) + \sum_{i=1}^n \ln(1-p)^{X_i-1} \\ &= n \ln(p) + \ln(1-p) \sum_{i=1}^n X_i - 1 \\ &= n \ln(p) + \ln(1-p) (n\bar{X}_n - n)\end{aligned}$$

En dérivant, on obtient donc

$$\ell'_n(p) = \frac{n}{p} - \frac{1}{1-p} (n\bar{X}_n - n)$$

En multipliant par $p(1-p) \neq 0$, on obtient alors

$$\begin{aligned}\ell'_n(p) = 0 &\Leftrightarrow n(1-p) - p(n\bar{X}_n - n) = 0 \\ &\Leftrightarrow n - np\bar{X}_n = 0 \\ &\Leftrightarrow p = \bar{X}_n^{-1}.\end{aligned}$$

De plus, comme

$$\ell''_n(p) = \frac{-n}{p^2} + \frac{1}{(1-p)^2} (n - n\bar{X}_n)$$

et $n \leq n\bar{X}_n$, la fonction est strictement concave et \bar{X}_n^{-1} est donc son unique minimum. On obtient donc

$$\hat{p}_n^{MV} = \bar{X}_n^{-1}$$

et on obtient tous les résultats de convergence avec les questions précédentes.

Exercice 5 – Loi exponentielle.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$. On rappelle que la densité de X est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \theta \exp(-\theta x) \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(x).$$

1. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{V}[X]$.

On a, à l'aide d'IPP

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_0^\infty \theta x e^{-\theta x} dx = \left[-x e^{-\theta x} \right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\theta x} dx = \left[-\theta^{-1} e^{-\theta x} \right]_0^\infty = \theta^{-1} \\ \mathbb{V}[X] &= \int_0^\infty \theta x^2 e^{-\theta x} dx - \theta^{-2} = \left[-x^2 e^{-\theta x} \right]_0^\infty + 2\theta^{-1} \int_0^\infty \theta x e^{-\theta x} dx - \theta^{-2} = \theta^{-2}.\end{aligned}$$

2. Soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X . A l'aide de la méthode des moments, proposer un estimateur $\hat{\theta}_n$ de θ .

Comme on a $\mathbb{E}[X] = \theta^{-1}$, on propose l'estimateur $\hat{\theta}_n = \bar{X}_n^{-1}$.

3. Est-il consistant? Fortement consistant?

Par la LFGN, \bar{X}_n converge presque sûrement vers θ^{-1} . De plus, comme la fonction $g : x \mapsto x^{-1}$ est continue en $\theta^{-1} > 0$, on a la convergence presque sûre de $\hat{\theta}_n$ grâce au théorème de continuité.

4. Donner sa normalité asymptotique.

Grâce au TLC, on a

$$\sqrt{n} \left(\bar{X}_n - \theta^{-1} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, \theta^{-2} \right).$$

Comme g est dérivable en θ^{-1} et $g'(\theta^{-1}) = \theta^2$, on obtient (delta méthode)

$$\sqrt{n} (\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N} (0, \theta^2).$$

5. Donner l'estimateur (si il existe) du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_n^{MV}$ de θ .

La vraisemblance est donnée par

$$L_n(\theta) = \prod_{i=1}^n \theta e^{-\theta X_i} = \theta^n \prod_{i=1}^n e^{-\theta X_i}.$$

On obtient donc la log-vraisemblance

$$\ell_n(\theta) = n \ln(\theta) - \theta \sum_{i=1}^n X_i.$$

On dérivant par rapport à θ , on obtient donc

$$\ell'_n(\theta) = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^n X_i$$

Lorsque l'on cherche le zéro de la dérivée, on trouve $\theta = \bar{X}_n^{-1}$ et en dressant le tableau de variation, on voit bien que c'est le maximum de la log vraisemblance. On obtient donc l'EMV $\theta_n^{MV} = \bar{X}_n^{-1}$.

6. Que pouvez vous en conclure?

Tous les résultats de convergence sont donnés dans les questions précédentes.

Exercice 6 – Loi de Rayleigh.

Soit θ un entier positif. On considère une variable aléatoire X suivant une loi de Rayleigh de

paramètre θ , i.e de densité f_θ définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par $f_\theta(x) = \lambda x \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$.

1. Calculer λ .

On a

$$\int_0^\infty x \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right) = \theta \left[-\frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right)\right]_0^\infty = \frac{\theta}{2}$$

et donc $\lambda = 2\theta^{-1}$.

2. Calculer l'espérance et la variance de X .

Calcul de $\mathbb{E}[X]$: Version 1 (stupide mais pas trop) A l'aide d'une IPP, en posant $\sigma^2 = \theta/2$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= 2\theta^{-1} \int_0^\infty x^2 e^{-\frac{x^2}{\theta}} = 2 \left[-\frac{1}{2} x e^{-\frac{x^2}{\theta}}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx \\ &= \sqrt{2\pi\sigma^2} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2\pi\sigma^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\pi\theta}. \end{aligned}$$

Calcul de $\mathbb{E}[X]$: Version 2 (subtile mais pas trop) On a, en posant $\sigma^2 = \theta/2$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= 2\theta^{-1} \int_0^\infty x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right) dx \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \int_0^\infty x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \sqrt{2\pi\sigma^2} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\pi\sigma^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\pi\theta} \end{aligned}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= 2\theta^{-1} \int_0^\infty x^3 \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right) \\ &= \left[-x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right)\right]_0^\infty + 2 \int_0^\infty x \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right) dx \\ &= \left[-\theta \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right]_0^\infty = \theta. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\mathbb{V}[X] = \theta - \frac{1}{4}\pi\theta = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\theta$$

3. Soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X . En déduire un estimateur $\hat{\theta}_n$ de θ .

La tentation serait de proposer $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ comme estimateur. Cependant, pour établir la normalité asymptotique, il faudra calculer le moment d'ordre 4. On va donc, par fainéantise légitime, plutôt s'intéresser à

$$\hat{\theta}_n = \frac{4}{\pi} \bar{X}_n^2.$$

4. Est-il consistant? Fortement consistant? Asymptotiquement normal?

On a \bar{X}_n qui converge presque sûrement (LFGN) vers $\frac{1}{2}\sqrt{\pi\theta}$, et la fonction $g : x \mapsto \frac{4}{\pi}x^2$ est continue en $\frac{1}{2}\sqrt{\pi\theta}$, et on obtient donc la convergence presque sûre de $\hat{\theta}_n$ grâce au théorème de continuité. De plus, on a le TLC

$$\sqrt{n} \left(\bar{X}_n - \frac{1}{2}\sqrt{\pi\theta} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \theta \right)$$

Comme la fonction g est dérivable en $\frac{1}{2}\sqrt{\pi\theta}$ et $g' \left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi\theta} \right) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\theta}$, on obtient

$$\sqrt{n} (\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, \left(\frac{16}{\pi} - 4 \right) \theta^2 \right).$$

5. Donner l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_n^{MV}$ de θ .

La vraisemblance est donnée pour tout θ par

$$L_n(\theta) = \prod_{i=1}^n 2\theta^{-1} X_i \exp \left(-\frac{X_i^2}{\theta} \right) = 2^n \theta^{-n} \prod_{i=1}^n X_i \exp \left(-\frac{X_i^2}{\theta} \right).$$

On obtient donc la log vraisemblance

$$\ell_n(\theta) = n \ln(2) - n \ln(\theta) + \sum_{i=1}^n \ln(X_i) - \sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{\theta}$$

En dérivant par rapport à θ , on obtient

$$\ell'_n(\theta) = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

De plus comme

$$\ell'_n(\theta) = \frac{n}{\theta^2} \left(-\theta + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \right)$$

en dressant le tableau de variation, on voit bien que $\hat{\theta}_n^{MV} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ est l'unique maximum de la log-vraisemblance, et on obtient donc l'EMV $\hat{\theta}_n^{MV} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$.

6. Donner la normalité asymptotique de cet estimateur.

Pour avoir la normalité asymptotique, on doit calculer le moment d'ordre 4. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [X^4] &= 2\theta^{-1} \int_0^\infty x^5 \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right) dx \\ &= \left[-x^4 \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right)\right]_0^\infty + 4 \int_0^\infty x^3 \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right) dx \\ &= 2\theta \mathbb{E} [X^2] \\ &= 2\theta^2 \end{aligned}$$

On obtient ainsi $\mathbb{V} [X^2] = \theta^2$, et le TLC

$$\sqrt{n} \left(\hat{\theta}_n^{MV} - \theta \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N} (0, \theta^2).$$

7. Que pouvez vous en conclure?

Comme on a $\left(\frac{16}{\pi} - 4\right) = 1.092 > 1$, on choisit donc l'estimateur du maximum de vraisemblance.

Exercice 7 – Loi de Poisson.

On considère une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre θ .

1. Soit (X_1, \dots, X_n) i.i.d de même loi que X . A l'aide de la méthode des moments, proposer un estimateur de θ .

On rappelle que $\mathbb{E}[X] = \theta$ et $\mathbb{V}[X] = \theta$. On obtient donc l'estimateur $\hat{\theta}_n = \bar{X}_n$.

2. Est-il consistant? Fortement consistant? Asymptotiquement normal?

On a la forte consistance grâce à la LFGN et on a le TLC

$$\sqrt{n} (\bar{X}_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \theta).$$

3. Donner l'estimateur du maximum de vraisemblance.

$$L_n(\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{\theta^{X_i} e^{-\theta}}{X_i!}$$

On a alors la log-vraisemblance

$$\ell_n(\theta) = -n\theta + \ln(\theta) \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n \ln(X_i!)$$

En dérivant par rapport à θ , on obtient

$$\ell'_n(\theta) = -n + \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n X_i$$

et en cherchant le zéro de la dérivée, on trouve $\theta = \bar{X}_n$ et en dressant le tableau de variation, on voit que c'est l'unique maximum, et on obtient donc $\theta_n^{MV} = \bar{X}_n$.

4. Est-il consistant? Fortement consistant? Asymptotiquement normal?
Tous les résultats sont donnés par les questions précédentes.

Exercice 8 – Loi exponentielle translatée.

Soit Y une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1, i.e de densité f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \exp(-x) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$$

Soit θ , on considère la variable aléatoire $X = Y + \theta$ de densité

$$f_\theta(x) = \exp(-(x - \theta)) \mathbf{1}_{[\theta, +\infty[}(x).$$

1. Calculer $\mathbb{E}[Y]$ et en déduire $\mathbb{E}[X]$.

Y suit une loi exponentielle de paramètre 1, et on a donc $\mathbb{E}[Y] = 1$. On obtient $\mathbb{E}[X] = 1 + \theta$.

2. Soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X . En déduire un estimateur $\hat{\theta}_n$ de θ . Cet estimateur est-il consistant? Fortement consistant? Sans biais?

On obtient donc $\hat{\theta}_n = \bar{X}_n - 1$. Comme \bar{X}_n converge presque sûrement vers $\theta + 1$ (LFGN), on obtient la forte consistance de notre estimateur. De plus, par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}_n] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] + 1 = \frac{n(\theta + 1)}{n} + 1 = \theta.$$

3. Calculer $\mathbb{V}[Y]$ et en déduire $\mathbb{V}[X]$. Comme Y suit une loi exponentielle de paramètre 1, $\mathbb{V}[Y] = 1$ et $\mathbb{V}[X] = \mathbb{V}[Y + \theta] = \mathbb{V}[Y] = 1$.

4. Donner la normalité asymptotique de $\hat{\theta}_n$.

Comme $\mathbb{V}[X] = 1$, le TLC nous donne

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - (\theta + 1)) = \sqrt{n}((\bar{X}_n - 1) - \theta) = \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

5. Donner l'erreur quadratique moyenne de $\hat{\theta}_n$.

On a, comme les X_i sont indépendants,

$$\mathbb{V} [\hat{\theta}_n] = \mathbb{V} [\bar{X}_n + 1] = \mathbb{V} [\bar{X}_n] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{V} [X_i] = \frac{1}{n}.$$

6. Donner l'estimateur $\hat{\theta}_n$ du maximum de vraisemblance.

On a la vraisemblance qui est définie pour tout $\theta > 0$ par

$$L_n(\theta) = \prod_{i=1}^n \exp(-(X_i - \theta)) \mathbf{1}_{[\theta, +\infty[}(X_i) = \prod_{i=1}^n \exp(-(X_i - \theta)) \mathbf{1}_{[0, X_i]}(\theta)$$

La vraisemblance est donc non nulle si et seulement si pour tout i , $\theta \leq X_i$ et donc si et seulement si $\theta \leq X_{(1)} = \min_i X_i$. De plus, elle est croissante sur $]0, X_{(1)}]$ et l'unique maximum est donc atteint en $X_{(1)}$. On obtient donc l'EMV $\hat{\theta}_n^{MV} = X_{(1)}$.

7. Rappeler la loi de $n(\hat{\theta}_n^{MV} - \theta)$.

On a $n(\hat{\theta}_n^{MV} - \theta)$ qui suit une loi exponentielle de paramètre 1, d'après le TD1.

8. Quel estimateur choisiriez vous ?

Comme $\hat{\theta}_n^{MV}$ converge à la vitesse $1/n$, il converge plus rapidement que $\hat{\theta}_n$ et on choisit donc $\hat{\theta}_n^{MV}$.

9. Donner son erreur quadratique moyenne.

Pour rappel, on a vu (TD1) que pour tout $x \geq \theta$, on a

$$F_{\hat{\theta}_n^{MV}}(x) = 1 - e^{n(\theta-x)}$$

En dérivant, on obtient

$$f_{\hat{\theta}_n^{MV}}(x) = ne^{n(\theta-x)} \mathbf{1}_{[\theta, +\infty[}(x).$$

Ainsi

$$\mathbb{E} [\hat{\theta}_n^{MV}] = \int_{\theta}^{+\infty} xne^{n(\theta-x)} dx = \left[-xe^{n(\theta-x)} \right]_{\theta}^{+\infty} + \int_{\theta}^{+\infty} e^{n(\theta-x)} dx = \theta + \left[-\frac{1}{n}e^{n(\theta-x)} \right]_{\theta}^{+\infty} = \theta + \frac{1}{n}.$$

De la même façon, on a

$$\mathbb{E} [(\hat{\theta}_n^{MV})^2] = \int_{\theta}^{+\infty} x^2 ne^{n(\theta-x)} dx = \left[-x^2 e^{n(\theta-x)} \right]_{\theta}^{+\infty} + 2 \int_{\theta}^{+\infty} xe^{n(\theta-x)} dx = \theta^2 + 2 \frac{n\theta + 1}{n^2}$$

On a donc

$$\mathbb{E} [(\hat{\theta}_n^{MV} - \theta)^2] = \mathbb{E} [(\hat{\theta}_n^{MV})^2] - 2\theta \mathbb{E} [\hat{\theta}_n^{MV}] + \theta^2 = \theta^2 + 2 \frac{n+1}{n^2} \theta - 2\theta^2 - \frac{2\theta}{n} + \theta^2 = \frac{2}{n^2}$$

A noter que l'erreur quadratique moyenne est meilleure que celle de $\bar{X}_n/2$ dès que $n \geq 2$.

Exercice 9 – Loi uniforme dilatée.

Soit $\theta > 0$. On considère une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur $[0, \theta]$ et des variables aléatoires indépendantes X_1, \dots, X_n et de même loi que X .

1. Par la méthode des moments, proposer un estimateur de θ et montrer sa convergence.

On a $\mathbb{E}[X] = \theta/2$, et $\mathbb{V}[X] = \theta^2/12$. Par la méthode des moments on obtient donc l'estimateur $\hat{\theta}_n = 2\bar{X}_n$. Par la loi forte des grands nombres, \bar{X}_n converge presque sûrement vers $\theta/2$, et on obtient la convergence presque sûre de $\hat{\theta}_n$ vers θ .

2. Cet estimateur est-il sans biais ?

On a

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}_n] = 2\mathbb{E}[\bar{X}_n] = 2\frac{\theta}{2} = \theta$$

et l'estimateur est donc sans biais.

3. Donner son erreur quadratique moyenne.

Comme l'estimateur est sans biais et en utilisant la décomposition biais-variance,

$$\mathbb{E}[(\hat{\theta}_n - \theta)^2] = \mathbb{V}[\hat{\theta}_n] = 4\mathbb{V}[\bar{X}_n] = \frac{\theta^2}{3n}.$$

4. Donner sa normalité asymptotique.

Le TLC nous donne

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta/2) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\theta^2}{12}\right).$$

En multipliant par 2, on obtient

$$2\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta/2) = \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\theta^2}{3}\right)$$

5. Donner l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ .

On a la vraisemblance

$$L_n(\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} \mathbf{1}_{[0, \theta]}(X_i) = \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{[X_i, +\infty]}(\theta)$$

et la vraisemblance est donc non nulle si et seulement si $\theta \geq X_i$ pour tout i , i.e si et seulement si $\theta \geq X_{(n)} = \max_{i=1, \dots, n}(X_i)$. La vraisemblance est donc nulle sur $] -\infty, X_{(n)}[$ et positive et décroissante sur $[X_{(n)}, +\infty[$, et atteint donc son maximum en $X_{(n)}$. L'EMV est donc défini par $\hat{\theta}_n^{MV} = X_{(n)}$.

6. Calculer la fonction de répartition de X .

On a pour tout $t \in [0, \theta]$, $F_X(t) = \frac{t}{\theta}$.

7. On considère maintenant $X_{(n)} = \max_{i=1, \dots, n} X_i$. Donner sa fonction de répartition.

On a pour tout $t \in [0, \theta]$, par indépendance des X_i ,

$$\mathbb{P} \left[X_{(n)} \leq t \right] = \mathbb{P} \left[\forall i, X_i \leq t \right] = \prod_{i=1}^n \frac{t}{\theta} = \frac{t^n}{\theta^n}.$$

8. Montrer que $X_{(n)}$ converge en probabilité vers θ .

On a pour tout $\epsilon \in (0, \theta)$,

$$\mathbb{P} \left[\left| X_{(n)} - \theta \right| \geq \epsilon \right] = \mathbb{P} \left[\theta - X_{(n)} \geq \epsilon \right] = \mathbb{P} \left[X_{(n)} \leq \theta - \epsilon \right] = \left(\frac{\theta - \epsilon}{\theta} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

9. A l'aide du lemme de Borel-Cantelli, en déduire la forte consistance de $X_{(n)}$.

Pour tout $\epsilon \in (0, \theta)$, on a

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P} \left[\left| X_{(n)} - \theta \right| \geq \epsilon \right] = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{\theta - \epsilon}{\theta} \right)^n = \frac{\theta - \epsilon}{\theta} \left(\frac{1}{1 - \frac{\theta - \epsilon}{\theta}} - 1 \right) = \frac{\theta - \epsilon}{\epsilon} < +\infty$$

Le lemme de Borel-Cantelli donne donc $X_{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \theta$.

10. Donner la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre θ^{-1} .

Soit F_E la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre θ^{-1} , on a pour tout $t \geq 0$,

$$F_E(t) = 1 - \exp \left(-\frac{t}{\theta} \right).$$

11. Montrer que $n \left(\theta - X_{(n)} \right)$ converge en loi vers une loi exponentielle de paramètre θ^{-1} .

Pour tout $t \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[n \left(\theta - X_{(n)} \right) \leq t \right] &= \mathbb{P} \left[-X_{(n)} \leq \frac{t}{n} - \theta \right] = \mathbb{P} \left[X_{(n)} \geq \theta - \frac{t}{n} \right] = 1 - \mathbb{P} \left[X_{(n)} \leq \theta - \frac{t}{n} \right] \\ &= 1 - \left(\frac{\theta - \frac{t}{n}}{\theta} \right)^n = 1 - \left(1 - \frac{t}{\theta n} \right)^n = 1 - \exp \left(n \ln \left(1 - \frac{t}{\theta n} \right) \right) \\ &\sim_{n \rightarrow \infty} 1 - \exp \left(-\frac{nt}{\theta n} \right) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 1 - \exp \left(-\frac{t}{\theta} \right). \end{aligned}$$

12. Quel estimateur de θ choisiriez vous ?

On choisit $X_{(n)}$ car il converge à la vitesse $1/n$.

Exercice 10 – Loi normale.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2 . On considère des variables aléatoires indépendantes X_1, \dots, X_n de même loi que X .

1. Ecrire la vraisemblance

On a

$$L_n(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(X_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \prod_{i=1}^n \exp\left(-\frac{(X_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

2. En déduire les estimateur du maximum de vraisemblance de μ et σ^2 .

On a la log vraisemblance

$$\ell_n(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu)^2}{2\sigma^2}$$

On doit donc résoudre simultanément

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \ell_n(\mu, \sigma^2) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ell_n(\mu, \sigma^2) = 0.$$

Pour le premier, on a

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \ell_n(\mu, \sigma^2) = \sum_{i=1}^n \frac{X_i - \mu}{\sigma^2} = 0 \Leftrightarrow \mu = \bar{X}_n$$

Pour le deuxième, on a

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ell_n(\bar{X}_n, \sigma^2) = -\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

En cherchant le zéro de la dérivée, on retrouve

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 =: \hat{\sigma}_n^2.$$

De plus la log-vraisemblance est concave sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et la Hessienne

$$H(\bar{X}_n, \hat{\sigma}_n^2) = \begin{pmatrix} -\frac{n}{\hat{\sigma}_n^2} & 0 \\ 0 & -\frac{n}{\hat{\sigma}_n^4} \end{pmatrix}$$

est définie négative. On a donc les estimateurs

$$\hat{\mu}_n = \bar{X}_n \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

3. Commenter.

On retrouve l'estimateur usuel de la moyenne mais l'estimateur biaisé de la variance.