Sorbonne Université — Année 2020/2021

L3 — Deuxième semestre

Feuille de TD 2 : Estimation

Exercice 1 : (estimation de la moyenne et de la variance). Soit X une variable aléatoire de moyenne μ et de variance σ^2 inconnues. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X.

1. Rappeler l'estimateur de la moyenne. Montrer qu'il est sans biais, fortement consistant et donner son erreur quadratique moyenne ainsi que sa normalité asymptotique.

   On a $\overline{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$, et par linéarité de l'espérance

   $$\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[X_i\right] = \mu.$$

   En utilisant la décomposition biais-variance et omme les X_i sont indépendants,

   $$\mathbb{E}\left[\left(\overline{X}_n - \mu\right)^2\right] = \mathbb{V}\left[\overline{X}_n\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{V}\left[X_i\right] = \frac{1}{n}\sigma^2.$$

   Par la loi forte des grands nombres, on a la convergence p.s et donc en probabilité, et on a le TLC

   $$\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \mu\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

2. On souhaite maintenant estimer σ^2. On propose l'estimateur suivant :

   $$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \overline{X}_n^2.$$

   Expliquer ce choix.

   Comme $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}\left[(X-\mu)^2\right]$, un estimateur naturel de la variance aurait été

   $$V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(X_i - \mu\right)^2,$$

   mais comme μ est inconnu, on le remplace par son estimateur.

3. Montrer que

   $$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(X_i - \mu\right)^2 - \left(\overline{X}_n - \mu\right)^2.$$

On fait apparaitre μ et on obtient

$$
\begin{aligned}
n\hat{\sigma}_n^2 &= \sum_{i=1}^{n} \left((X_i - \mu) + \left(\mu - \overline{X}_n\right) \right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu) \left(\mu - \overline{X}_n\right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\mu - \overline{X}_n\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 + 2 \left(\mu - \overline{X}_n\right) \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu) + n \left(\mu - \overline{X}_n\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 + 2 \left(\mu - \overline{X}_n\right) n \left(\overline{X}_n - \mu\right) + n \left(\mu - \overline{X}_n\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 - n \left(\mu - \overline{X}_n\right)^2 .
\end{aligned}
$$

4. Soit $\tau^4 = \mathbb{E}\left[(X - \mu)^4 \right]$. A l'aide du Théorème de Slutsky, donner la normalité asymptotique de $\hat{\sigma}_n^2$.

   On va appliquer le TLC au premier terme de la décomposition précédente, et montrer que le deuxième est négligeable. Le TLC nous donne

$$
\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 - \sigma^2 \right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \tau^4 - \sigma^4\right)
$$

   On traite maintenant le terme

$$
\sqrt{n} \left(\overline{X}_n - \mu\right)^2 = \left(\sqrt{n} \left(\overline{X}_n - \mu\right)\right) \left(\overline{X}_n - \mu\right).
$$

   Grâce au TLC, on a

$$
\sqrt{n} \left(\overline{X}_n - \mu\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right).
$$

   De plus, comme $\overline{X}_n - \mu$ converge en probabilité vers 0, on obtient que à l'aide du Théorème de Slutsky

$$
\sqrt{n} \left(\overline{X}_n - \mu\right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} 0
$$

   et en particulier on obtient la convergence en probabilité. Donc, à l'aide du Théorème de Slutsky, on obtient

$$
\sqrt{n} \left(\hat{\sigma}_n^2 - \sigma^2\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \tau^4 - \sigma^4\right).
$$

   2ème version : Markov En utilisant l'inégalité de Markov, on a pour tout $\epsilon > 0$,

$$
\mathbb{P}\left[\sqrt{n} \left(\overline{X}_n - \mu\right)^2 \geq \epsilon \right] \leq \frac{\sqrt{n} \mathbb{E}\left[\left(\overline{X}_n - \mu\right)^2 \right]}{\epsilon} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{n}\epsilon},
$$

et on a donc la convergence en probabilité.

5. Calculer $\mathbb{E}\left[\hat{\sigma}_n^2\right]$. L'estimateur $\hat{\sigma}_n$ est-il sans biais ?

   Par linéarité de l'espérance et en utilisant la décomposition précédent, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\hat{\sigma}_n^2\right] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - \left(\overline{X}_n-\mu\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[(X_i-\mu)^2\right] - \mathbb{E}\left[\left(\overline{X}_n-\mu\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}\left[X_i\right] - \mathbb{V}\left[\overline{X}_n\right] \\
&= \frac{n-1}{n}\sigma^2.
\end{aligned}$$

6. En déduire un estimateur sans biais de σ^2 et donner sa normalité asymptotique.

   On propose
$$S_n^2 = \frac{n}{n-1}\hat{\sigma}_n^2.$$
   On obtient par linéarité $\mathbb{E}\left[S_n^2\right] = \frac{n}{n-1}\mathbb{E}\left[\hat{\sigma}_n^2\right] = \sigma^2$. De plus on obtient la normalité asymptotique par le Théorème de Slutsky. Plus précisément,

$$\sqrt{n}\left(S_n^2-\sigma^2\right) = \sqrt{n}\left(\frac{n}{n-1}\hat{\sigma}_n^2-\sigma^2\right) = \sqrt{n}\left(\hat{\sigma}_n^2-\sigma^2\right) + \frac{\sqrt{n}}{n-1}\hat{\sigma}_n^2$$

   On a donc la convergence en loi du premier terme sur la droite de l'égalité précédente, et comme $\hat{\sigma}_n^2$ converge en probabilité vers σ^2 et $\frac{\sqrt{n}}{n-1}$ converge vers 0, le second terme converge en probabilité vers 0.

Exercice 2 : (estimation de la covariance). Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles d'espérances respectives μ_X, μ_Y et de variances respectives σ_X^2, σ_Y^2. On s'intéresse ici à l'estimation de la covariance C de X, Y, définie par

$$C = \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])\right] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

Soient $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ des couples de variables aléatoires indépendants et de même loi que (X, Y). On s'intéresse à l'estimateur C_n défini par

$$C_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}_n\right)\left(Y_i-\overline{Y}_n\right).$$

1. Justifier la proposition de cet estimateur.

Un estimateur naturel aurait été

$$\mathrm{Cov}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu_X\right)\left(Y_i-\mu_Y\right)$$

mais comme μ_X et μ_Y sont inconnues, on les remplace par leurs estimateurs respectifs.

2. Montrer que

$$\sum_{j=1}^{n}\left(X_j-\overline{X}_n\right)\left(Y_j-\overline{Y}_n\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(X_j-\mu_X\right)\left(Y_j-\mu_Y\right) - n\left(\overline{X}_n-\mu_X\right)\left(\overline{Y}_n-\mu_Y\right).$$

On va faire apparaitre μ_X et μ_Y et on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\left(X_j-\overline{X}_n\right)\left(Y_j-\overline{Y}_n\right) &= \sum_{j=1}^{n}\left(\left(X_j-\mu_X\right)+\left(\mu-\overline{X}_n\right)\right)\left(\left(Y_j-\mu_Y\right)+\left(\mu-\overline{Y}_n\right)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu_X\right)\left(Y_i-\mu_Y\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu_X\right)\left(\mu_Y-\overline{Y}_n\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(\mu_X-\overline{X}_n\right)\left(Y_i-\mu_Y\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(\mu_X-\overline{X}_n\right)\left(\mu_Y-\overline{Y}_n\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu_X\right)\left(Y_i-\mu_Y\right)+\left(\mu_Y-\overline{Y}_n\right)\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu_X\right)+\left(\mu_X-\overline{X}_n\right)\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\mu_Y\right)+n\left(\mu_X-\overline{X}_n\right)\left(\mu_Y-\overline{Y}_n\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu_X\right)\left(Y_i-\mu_Y\right)+n\left(\mu_Y-\overline{Y}_n\right)\left(\overline{X}_n-\mu_X\right)+n\left(\mu_X-\overline{X}_n\right)\left(\overline{Y}_n-\mu_Y\right)+n\left(\mu_X-\overline{X}_n\right)\left(\mu_Y-\overline{Y}_n\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu_X\right)\left(Y_i-\mu_Y\right)-n\left(\overline{X}_n-\mu_X\right)\left(\overline{Y}_n-\mu_Y\right).
\end{aligned}$$

3. Montrer que

$$n^2\left(\overline{X}_n-\mu_X\right)\left(\overline{Y}_n-\mu_Y\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(X_j-\mu_X\right)\left(Y_j-\mu_Y\right)+\sum_{i\neq j}\left(X_i-\mu_X\right)\left(Y_j-\mu_Y\right).$$

On a

$$\begin{aligned}
n^2\left(\overline{X}_n-\mu_X\right)\left(\overline{Y}_n-\mu_Y\right) &= \left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu_X\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\mu_Y\right)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(X_j-\mu_X\right)\left(Y_n-\mu_Y\right)+\sum_{i\neq j}\left(X_i-\mu_X\right)\left(Y_j-\mu_Y\right).
\end{aligned}$$

4. Calculer $\mathbb{E}\left[C_n\right]$. Que pouvez vous en déduire ?

Par linéarité de l'espérance et en utilisant la décomposition de la question 2, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[C_n\right] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu_X\right)\left(Y_i-\mu_Y\right)-\left(\overline{X}_n-\mu_X\right)\left(\overline{Y}_n-\mu_Y\right)\right]\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left(X_i-\mu_X\right)\left(Y_i-\mu_Y\right)\right]-\mathbb{E}\left[\left(\overline{X}_n-\mu_X\right)\left(\overline{Y}_n-\mu_Y\right)\right]\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}C-\frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left[n^2\left(\overline{X}_n-\mu_X\right)\left(\overline{Y}_n-\mu_Y\right)\right]\end{aligned}$$

En utilisant la décomposition de la question 3 et comme les couples (X_i, Y_i) sont indépendants, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[n^2\left(\overline{X}_n-\mu_X\right)\left(\overline{Y}_n-\mu_Y\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_j-\mu_X\right)\left(Y_j-\mu_Y\right)+\sum_{i\neq j}\left(X_i-\mu_X\right)\left(Y_j-\mu_Y\right)\right]\\ &= \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left(X_j-\mu_X\right)\left(Y_j-\mu_Y\right)\right]+\sum_{i\neq j}\mathbb{E}\left[\left(X_i-\mu_X\right)\left(Y_j-\mu_Y\right)\right]\\ &= \sum_{i=1}^{n}C+\sum_{i\neq j}\operatorname{Cov}\left(X_i,Y_j\right)\\ &= nC.\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\mathbb{E}\left[C_n\right]=\frac{n-1}{n}C.$$

5. Proposer un estimateur sans biais de C. On a donc

$$\hat{C}_n=\frac{n}{n-1}C_n.$$

6. En posant $Z_j=\left(X_j-\mu_X\right)\left(Y_j-\mu_Y\right)$, montrer que C_n converge presque sûrement vers C. On a

$$C_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i-\left(\overline{X}_n-\mu_X\right)\left(\overline{Y}_n-\mu_Y\right).$$

   Par la loi forte des grands nombres, le premier terme converge presque sûrement vers C, tendis que le deuxième converge presque sûrement vers 0 (car $\overline{X}_n$ et $\overline{Y}_n$ convergent presque sûrement vers μ_X et μ_Y).

7. Montrer, soit à l'aide des inégalités de Markov et de Cauchy-Schwarz, soit à l'aide du théorème de Slutsky, que

$$\sqrt{n}\left(\overline{X}_n-\mu_X\right)\left(\overline{Y}_n-\mu_Y\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}}0.$$

Version Markov : Comme pour toutes constantes positives a, b, on a $ab \leq 2^{-1}a^2 + 2^{-1}b^2$, on obtient

$$\mathbb{E}\left[\sqrt{n}\left|\left(\overline{X}_n - \mu_X\right)\left(\overline{Y}_n - \mu_Y\right)\right|\right] \leq \sqrt{n}\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\left(\overline{X}_n - \mu_X\right)^2\right] + \sqrt{n}\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\left(\overline{Y}_n - \mu_Y\right)^2\right] = \frac{\sigma_X^2}{2\sqrt{n}} + \frac{\sigma_Y^2}{2\sqrt{n}}.$$

En appliquant l'inégalité de Markov, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\sqrt{n}\left|\left(\overline{X}_n - \mu_X\right)\left(\overline{Y}_n - \mu_Y\right)\right| \geq \epsilon\right] &\leq \frac{1}{\epsilon}\mathbb{E}\left[\sqrt{n}\left|\left(\overline{X}_n - \mu_X\right)\left(\overline{Y}_n - \mu_Y\right)\right|\right] \\ &\leq \frac{\sigma_X^2}{2\sqrt{n}\epsilon} + \frac{\sigma_Y^2}{2\sqrt{n}\epsilon}.\end{aligned}$$

Version Markov + Cauchy-Schwarz : En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sqrt{n}\left|\left(\overline{X}_n - \mu_X\right)\left(\overline{Y}_n - \mu_Y\right)\right|\right] &\leq \sqrt{n}\sqrt{\mathbb{E}\left[\left|\overline{X}_n - \mu_X\right|^2\right]}\sqrt{\mathbb{E}\left[\left|\overline{Y}_n - \mu_Y\right|^2\right]} \\ &= \sqrt{n}\frac{\sigma_X\sigma_Y}{n}.\end{aligned}$$

Version Slutsky : On a

$$\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \mu_X\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma_X^2\right) \qquad \text{et} \qquad \overline{Y}_n - \mu_Y \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0,$$

et donc en appliquant le théorème de Stlusky, on a la convergence en loi vers 0 et donc la convergence en probabilité.

8. Soit $\tau^4 = \mathbb{E}\left[\left(X - \mu_X\right)^2\left(Y - \mu_Y\right)^2\right] < +\infty$. Donner la normalité asymptotique de C_n, et en déduire celle de l'estimateur sans biais.

   Il suffit juste d'appliquer le TLC à $\overline{Z}_n$ et le Théorème de Slutsky.

Exercice 3 : méthode des moments. Soit $\theta \in \Theta$ où Θ est un ouvert de $\mathbb{R}$, et $\varphi : \Theta \longrightarrow \varphi(\Theta)$ un C^1-difféomorphisme. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\mathbb{E}\left[X^k\right] = \varphi(\theta).$$

De plus, on suppose que X admet un moment d'ordre $2k$.

1. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de même loi que X. Proposer un estimateur de $\varphi(\theta)$.

$$\hat{\varphi}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_i^k$$

2. Est-il consistant ? Asymptotiquement normal ?

La consistance est une application directe de la LGN en posant $Y_i = X_i^k$. On note $\sigma_k^2 = \mathbb{V}\left[X^k\right]$, et on a

$$\sqrt{n}\left(\hat{\varphi}_n - \varphi(\theta)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma_k^2\right).$$

3. En déduire un estimateur de θ.

$$\hat{\theta}_n = \varphi^{-1}\left(\hat{\varphi}_n\right).$$

4. Est-il consistant ?

   Comme φ^{-1} est continue, on obtient la consistance via le théorème de continuité.

5. On suppose que $\varphi'(\theta) \neq 0$. En déduire la normalité asymptotique de l'estimateur de θ.

   Comme $\left(\varphi^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}$, on a

$$\left(\varphi^{-1}\right)'(\varphi(\theta)) = \frac{1}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(\varphi(\theta))\right)} = \frac{1}{\varphi'(\theta)}.$$

   On obtient donc, en appliquant la Delta méthode

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_k^2}{\left(\varphi'(\theta)\right)^2}\right).$$

Exercice 4 : (loi géométrique). Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p, i.e pour tout entier $k \geq 1$, $\mathbb{P}[X = k] = (1-p)^{k-1}p$.

1. Rappeler l'espérance et la variance de X.

   On a $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$ et $\mathbb{V}[X] = \frac{1-p}{p^2}$.

2. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. Par la méthode des moments, donner un estimateur $\hat{p}_n$ de p.

   Comme $\mathbb{E}[X] = p^{-1}$, $\overline{X}_n$ converge vers p^{-1} et on propose donc l'estimateur $\hat{p}_n = \overline{X}_n^{-1}$.

3. Est-il consistant ? Fortement consistant ? Asymptotiquement normal ?

   Comme $\overline{X}_n$ converge presque sûrement (LFGN) vers p^{-1} et comme la fonction $g : x \longmapsto x^{-1}$ est continue en $p^{-1} \neq 0$, on obtient la convergence presque sûre à l'aide du théorème de continuité. De plus, comme

$$\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - p^{-1}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1-p}{p^2}\right),$$

   et comme $g'\left(p^{-1}\right) = p^2$, on obtient à l'aide de la delta-méthode

$$\sqrt{n}\left(\hat{p}_n - p\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, p^2(1-p)\right).$$

4. Donner l'estimateur $\hat{p}_n^{MV}$ du maximum de vraisemblance de p. Que pouvez vous en conclure ?

On a la vraisemblance qui est définie pour tout p par

$$L_n(p) = \prod_{i=1}^{n} (1-p)^{X_{i-1}} p = p^n \prod_{i=1}^{n} (1-p)^{X_i - 1}$$

On obtient donc la log-vraisemblance

$$\begin{aligned} l_n(p) &= \ln(p^n) + \sum_{i=1}^{n} \ln(1-p)^{X_i-1} \\ &= n\ln(p) + \ln(1-p) \sum_{i=1}^{n} X_i - 1 \\ &= n\ln(p) + \ln(1-p)\left(n\overline{X}_n - n\right) \end{aligned}$$

En dérivant, on obtient donc

$$l_n'(p) = \frac{n}{p} - \frac{1}{1-p}\left(n\overline{X}_n - n\right)$$

En multipliant par $p(1-p) \neq 0$, on obtient alors

$$\begin{aligned} l_n'(p) = 0 &\Leftrightarrow n(1-p) - p(n\overline{X}_n - n) = 0 \\ &\Leftrightarrow n - np\overline{X}_n = 0 \\ &\Leftrightarrow p = \overline{X}_n^{-1}. \end{aligned}$$

De plus, comme

$$l_n''(p) = \frac{-n}{p^2} + \frac{1}{(1-p)^2}\left(n - n\overline{X}_n\right)$$

et $n \leq n\overline{X}_n$, la fonction est strictement concave et X_n est donc son unique minimum. On obtient donc

$$\hat{p}_n^{MV} = \overline{X}_n^{-1}$$

et on obtient tous les résultats de convergence avec les questions précédentes.

Exercice 5 : (loi exponentielle). Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$. On rappelle que la densité de X est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \theta \exp(-\theta x) \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x).$$

1. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{V}[X]$.

On a, à l'aide d'IPPs

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \theta x e^{-\theta x} dx = \left[-xe^{-\theta x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\theta x} dx = \left[-\theta^{-1} e^{-\theta x}\right]_0^\infty = \theta^{-1}$$
$$\mathbb{V}[X] = \int_0^\infty \theta x^2 e^{-\theta x} dx - \theta^{-2} = \left[-x^2 e^{-\theta x}\right]_0^\infty + 2\theta^{-1} \int_0^\infty \theta x e^{-\theta x} dx - \theta^{-2} = \theta^{-2}.$$

2. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. A l'aide de la méthode des moments, proposer un estimateur $\hat{\theta}_n$ de θ.

   Comme on a $\mathbb{E}[X] = \theta^{-1}$, on propose l'estimateur $\hat{\theta}_n = \overline{X}_n^{-1}$.

3. Est-il consistant ? Fortement consistant ?

   Par la LFGN, $\overline{X}_n$ converge presque sûrement vers θ^{-1}. De plus, comme la fonction $g : x \longmapsto x^{-1}$ est continue en $\theta^{-1} > 0$, on a la convergence presque sûre de $\hat{\theta}_n$ grâce au théorème de continuité.

4. Donner sa normalité asymptotique.

   Grâce au TLC, on a
$$\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \theta^{-1}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \theta^{-2}\right).$$
   Comme g est dérivable en θ^{-1} et $g'\left(\theta^{-1}\right) = \theta^2$, on obtient (delta méthode)
$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \theta^{2}\right).$$

5. Donner l'estimateur (si il existe) du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_n^{MV}$ de θ.

   La vraisemblance est donnée par
$$L_n(\theta) = \prod_{i=1}^n \theta e^{-\theta X_i} = \theta^n \prod_{i=1}^n e^{-\theta X_i}.$$
   On obtient donc la log-vraisemblance
$$l_n(\theta) = n\ln(\theta) - \theta \sum_{i=1}^n X_i.$$
   On dérivant par rapport à θ, on obtient donc
$$l_n'(\theta) = \frac{n}{\theta} - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n Xi$$
   Lorsque l'on cherche le zéro de la dérivée, on trouve $\theta = \overline{X}_n^{-1}$ et en dressant le tableau de variation, on voit bien que c'est le maximum de la log vraisemblance. On obtient donc l'EMV $\theta_n^{MV} = \overline{X}_n^{-1}$.

6. Que pouvez vous en conclure ?

Tous les résultats de convergence sont donnés dans les questions précédentes.

Exercice 6 : (loi de Rayleigh). Soit θ un entier positif. On considère une variable aléatoire X suivant une loi de Rayleigh de paramètre θ, i.e de densité f_θ définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par $f_\theta(x) = \lambda x \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$.

1. Calculer λ.

   On a
$$\int_0^\infty x \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right) = \theta \left[-\frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right)\right]_0^\infty = \frac{\theta}{2}$$
   et donc $\lambda = 2\theta^{-1}$.

2. Calculer l'espérance et la variance de X.

   Calcul de $\mathbb{E}[X]$: Version 1 (stupide mais pas trop) A l'aide d'une IPP, en posant $\sigma^2 = \theta/2$,
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X\right] = 2\theta^{-1} \int_0^\infty x^2 e^{-\frac{x^2}{\theta}} &= 2\left[-\frac{1}{2} x e^{-\frac{x^2}{\theta}}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx \\
&= \sqrt{2\pi\sigma^2} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{2\pi\sigma^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\pi\theta}.
\end{aligned}$$

   Calcul de $\mathbb{E}[X]$: Version 2 (subtile mais pas trop) On a, en posant $\sigma^2 = \theta/2$
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= 2\theta^{-1} \int_0^\infty x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right) dx \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \int_0^\infty x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \sqrt{2\pi\sigma^2} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\pi\sigma^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\pi\theta}
\end{aligned}$$

   De la même façon,
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X^2\right] &= 2\theta^{-1} \int_0^\infty x^3 \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right) \\
&= \left[-x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right)\right]_0^\infty + 2\int_0^\infty x \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right) dx \\
&= \left[-\theta \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right]_0^\infty = \theta.
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\mathbb{V}[X] = \theta - \frac{1}{4}\pi\theta = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\theta$$

3. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. En déduire un estimateur $\hat{\theta}_n$ de θ.

   La tentation serait de proposer $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$ comme estimateur. Cependant, pour établir la normalité asymptotique, il faudra calculer le moment d'ordre 4. On va donc, par fainéantise légitime, plutôt s'intéresser à

$$\hat{\theta}_n = \frac{4}{\pi}\overline{X}_n^2.$$

4. Est-il consistant ? Fortement consistant ? Asymptotiquement normal ?

   On a $\overline{X}_n$ qui converge presque sûrement (LFGN) vers $\frac{1}{2}\sqrt{\pi\theta}$, et la fonction $g : x \longmapsto \frac{4}{\pi}x^2$ est continue en $\theta > 0$, et on obtient donc la convergence presque sûre de $\hat{\theta}_n$ grâce au théorème de continuité. De plus, on a le TLC

$$\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \frac{1}{2}\sqrt{\pi\theta}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\theta\right)$$

   Comme la fonction g est dérivable en $\frac{1}{2}\sqrt{\pi\theta}$ et $g'\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi\theta}\right) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\theta}$, on obtient

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \left(\frac{16}{\pi} - 4\right)\theta^2\right).$$

5. Donner l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_n^{MV}$ de θ.

   La vraisemblance est donnée pour tout θ par

$$L_n(\theta) = \prod_{i=1}^n 2\theta^{-1}X_i \exp\left(-\frac{X_i^2}{\theta}\right) = 2^n\theta^{-n}\prod_{i=1}^n X_i \exp\left(-\frac{X_i^2}{\theta}\right).$$

   On obtient donc la log vraisemblance

$$l_n(\theta) = n\ln(2) - n\ln(\theta) + \sum_{i=1}^n \ln(X_i) - \sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{\theta}$$

   En dérivant par rapport à θ, on obtient

$$l_n'(\theta) = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^n X_i^2$$

De plus comme

$$l'_n(\theta) = \frac{n}{\theta^2}\left(-\theta + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)$$

en dressant le tableau de variation, on voit bien que $\hat{\theta}_n^{MV} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ est l'unique maximum de la log-vraisemblance, et on obtient donc l'EMV $\hat{\theta}_n^{MV} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

6. Donner la normalité asymptotique de cet estimateur.

   Pour avoir la normalité asymptotique, on doit calculer le moment d'ordre 4. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X^4\right] &= 2\theta^{-1}\int_0^{\infty} x^5 \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right) dx \\
&= \left[-x^4 \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right)\right]_0^{\infty} + 4\int_0^{\infty} x^3 \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right) dx \\
&= 2\theta\mathbb{E}\left[X^2\right] \\
&= 2\theta^2
\end{aligned}$$

   On obtient ainsi $\mathbb{V}\left[X^2\right] = \theta^2$, et le TLC

$$\sqrt{n}\left(\theta_n^{MV} - \theta\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \theta^2\right).$$

7. Que pouvez vous en conclure ?

   Comme on a $\left(\frac{16}{\pi} - 4\right) = 1.092 > 1$, on choisit donc l'estimateur du maximum de vraisemblance.

Exercice 7 : (loi de Poisson). On considère une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre θ.

1. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ i.i.d de même loi que X. A l'aide de la méthode des moments, proposer un estimateur de θ.

   On rappelle que $\mathbb{E}[X] = \theta$ et $\mathbb{V}[X] = \theta$. On obtient donc l'estimateur $\hat{\theta}_n = \overline{X}_n$.

2. Est-il consistant ? Fortement consistant ? Asymptotiquement normal ?

   On a la forte consistance grâce à la LFGN et on a le TLC

$$\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \theta\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \theta).$$

3. Donner l'estimateur du maximum de vraisemblance.

$$L_n(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta^{X_i} e^{-\theta}}{X_i!}$$

On a alors la log-vraisemblance

$$l_n(\theta) = -n\theta + \ln(\theta) \sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} \ln(X_i!)$$

En dérivant par rapport à θ, on obtient

$$l_n'(\theta) = -n + \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

et en cherchant le zéro de la dérivé, on trouve $\theta = \overline{X}_n$ et en dressant le tableau de variation, on voit que c'est l'unique maximum, et on obtient donc $\theta_n^{MV} = \overline{X}_n$.

4. Est-il consistant ? Fortement consistant ? Asymptotiquement normal ?

   Tous les résultats sont données par les questions précédentes.

Exercice 8 (loi exponentielle translatée). Soit Y une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1, i.e de densité f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \exp(-x) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$$

Soit θ, on considère la variable aléatoire $X = Y + \theta$ de densité

$$f_\theta(x) = \exp(-(x-\theta)) \mathbf{1}_{[\theta,+\infty[}(x).$$

1. Calculer $\mathbb{E}[Y]$ et en déduire $\mathbb{E}[X]$.

   Y suit une loi exponentielle de paramètre 1, et on a donc $\mathbb{E}[Y] = 1$. On obtient $\mathbb{E}[X] = 1 + \theta$.

2. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. En déduire un estimateur $\hat{\theta}_n$ de θ. Cet estimateur est-il consistant ? Fortement consistant ? Sans biais ?

   On obtient donc $\hat{\theta}_n = \overline{X}_n - 1$. Comme la fonction $x \longmapsto x - 1$ est continue, et comme $\overline{X}_n$ converge presque sûrement vers $\theta + 1$ (LFGN), par le théorème de continuité on obtient la forte consistance de notre estimateur. De plus, par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}\left[\hat{\theta}_n\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] + 1 = \frac{n(\theta-1)}{n} + 1 = \theta.$$

3. Calculer $\mathbb{V}[Y]$ et en déduire $\mathbb{V}[X]$. Comme Y suit une loi exponentielle de paramètre 1, $\mathbb{V}[Y] = 1$ et $\mathbb{V}[X] = \mathbb{V}[Y + \theta] = \mathbb{V}[Y] = 1$.

4. Donner la normalité asymptotique de $\hat{\theta}_n$.

   Comme $\mathbb{V}[X] = 1$, le TLC nous donne

$$\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - (\theta+1)\right) = \sqrt{n}\left(\left(\overline{X}_n - 1\right) - \theta\right) = \sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

5. Donner l'erreur quadratique moyenne de $\hat{\theta}_n$.

   On a, comme les X_i sont indépendants,

$$\mathbb{V}\left[\hat{\theta}_n\right] = \mathbb{V}\left[\overline{X}_n + 1\right] = \mathbb{V}\left[\overline{X}_n\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}\left[X_i\right] = \frac{1}{n}.$$

6. Donner l'estimateur $\hat{\theta}_n$ du maximum de vraisemblance.

   On a la vraisemblance qui est définie pour tout $\theta > 0$ par

$$L_n(\theta) = \prod_{i=1}^{n}\exp\left(-\left(X_i - \theta\right)\right)\mathbf{1}_{[\theta,+\infty[}\left(X_i\right) = \prod_{i=1}^{n}\exp\left(-\left(X_i - \theta\right)\right)\mathbf{1}_{[0,X_i]}(\theta)$$

   La vraisemblance est donc non nulle si et seulement si pour tout i, $\theta \leq X_i$ et donc si et seulement si $\theta \leq X_{(1)} = \min_i X_i$. De plus, elle est croissante sur $]0, X_{(1)}]$ et l'unique maximum est donc atteint en $X_{(1)}$. On obtient donc l'EMV $\hat{\theta}_n^{MV} = X_{(1)}$.

7. Rappeler la loi de $n\left(\hat{\theta}_n^{MV} - \theta\right)$.

   On a $n\left(\hat{\theta}_n^{MV} - \theta\right)$ qui suit une loi exponentielle de paramètre 1, d'après le TD1.

8. Quel estimateur choisiriez vous ?

   Comme $\hat{\theta}_n^{MV}$ converge à la vitesse $1/n$, il converge plus rapidement que $\hat{\theta}_n$ et on choisit donc $\hat{\theta}_n^{MV}$.

9. Donner son erreur quadratique moyenne.

   Pour rappel, on a vu (TD1) que pour tout $x \geq \theta$, on a

$$F_{\hat{\theta}_n^{MV}}(x) = 1 - e^{n(\theta - x)}$$

   En dérivant, on obtient

$$f_{\hat{\theta}_n^{MV}}(x) = ne^{n(\theta-x)}\mathbf{1}_{[\theta,+\infty[}(x).$$

   Ainsi

$$\mathbb{E}\left[\hat{\theta}_n^{MV}\right] = \int_{\theta}^{+\infty} xne^{n(\theta-x)}dx = \left[-xe^{n(\theta-x)}\right]_{\theta}^{+\infty} + \int_{\theta}^{+\infty} e^{n(\theta-x)}dx = \theta + \left[-\frac{1}{n}e^{n(\theta-x)}\right]_{\theta}^{+\infty} = \theta + \frac{1}{n}.$$

   De la même façon, on a

$$\mathbb{E}\left[(\hat{\theta}_n^{MV})^2\right] = \int_{\theta}^{+\infty} x^2ne^{n(\theta-x)}dx = \left[-x^2e^{n(\theta-x)}\right]_{\theta}^{+\infty} + 2\int_{\theta}^{+\infty} xe^{n(\theta-x)}dx = \theta^2 + 2\frac{n\theta+1}{n^2}$$

   On a donc

$$\mathbb{E}\left[\left(\hat{\theta}_n^{MV} - \theta\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[(\hat{\theta}_n^{MV})^2\right] - 2\theta\mathbb{E}\left[\hat{\theta}_n^{MV}\right] + \theta^2 = \theta^2 + 2\frac{n+1}{n^2}\theta - 2\theta^2 - \frac{2\theta}{n} + \theta^2 = \frac{2}{n^2}$$

Exercice 9 : (loi uniforme dilatée) Soit $\theta > 0$. On considère une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur $[0, \theta]$. Soit $x_1, ..., x_n$ des réalisation des variables aléatoires indépendantes $X_1, ..., X_n$ et de même loi que X.

1. Par la méthode des moments, proposer un estimateur de θ et montrer sa convergence.

   On a $\mathbb{E}[X] = \theta/2$, et $\mathbb{V}[X] = \theta^2/12$. Par la méthode des moments on obtient donc l'estimateur $\hat{\theta}_n = 2\overline{X}_n$. Comme la fonction $g : x \longmapsto 2x$ est continue, et comme (LFGN) $\overline{X}_n$ converge presque sûrement vers $\theta/2$, on obtient la convergence presque sûre de $\hat{\theta}_n$ vers θ à l'aide du Théorème de continuité.

2. Cet estimateur est-il sans biais ?

   On a
   $$\mathbb{E}\left[\hat{\theta}_n\right] = 2\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = 2\frac{\theta}{2} = \theta$$
   et l'estimateur est donc sans biais.

3. Donner son erreur quadratique moyenne.

   Comme l'estimateur est sans biais et en utilisant la décomposition biais-variance,
   $$\mathbb{E}\left[\left(\hat{\theta}_n - \theta\right)^2\right] = \mathbb{V}\left[\hat{\theta}_n\right] = 4\mathbb{V}\left[\overline{X}_n\right] = \frac{\theta^2}{3n}.$$

4. Donner sa normalité asymptotique.

   Le TLC nous donne
   $$\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \theta/2\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\theta^2}{12}\right).$$
   Par la delta-méthode, on obtient
   $$2\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \theta/2\right) = \left(\hat{\theta}_n - \theta\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\theta^2}{3}\right)$$

5. Donner l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ.

   On a la vraisemblance
   $$L_n(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta}\mathbf{1}_{[0,\theta]}(X_i) = \frac{1}{\theta^n}\prod_{i=1}^{n}\mathbf{1}_{[X_i,+\infty[}(\theta)$$
   et la vraisemblance est donc non nulle si et seulement si $\theta \geq X_i$ pour tout i, i.e si et seuelement si $\theta \geq X_{(n)} = \max_{i=1,\dots,n}(X_i)$. La vraisemblance est donc nulle sur $]-\infty, X_{(n)}[$ et positive et décroissante sur $[X_{(n)}, +\infty[$, et atteint donc son maximum en $X_{(n)}$. L'EMV est donc défini par $\hat{\theta}_n^{MV} = X_{(n)}$.

6. Calculer la fonction de répartition de X.

   On a pour tout $t \in [0, \theta]$, $F_X(t) = \frac{t}{\theta}$.

7. On considère maintenant $X_{(n)} = \max_{i=1,\dots,n} X_i$. Donner sa fonction de répartition.

On a pour tout $t \in [0, \theta]$, par indépendance des X_i,

$$\mathbb{P}\left[X_{(n)} \leq t\right] = \mathbb{P}\left[\forall i, X_i \leq t\right] = \prod_{i=1}^{n} \frac{t}{\theta} = \frac{t^n}{\theta^n}.$$

8. Montrer que $X_{(n)}$ converge en probabilité vers θ.

   On a pour tout $\epsilon \in (0, \theta)$,

$$\mathbb{P}\left[\left|X_{(n)} - \theta\right| \geq \epsilon\right] = \mathbb{P}\left[\theta - X_{(n)} \geq \epsilon\right] = \mathbb{P}\left[X_{(n)} \leq \theta - \epsilon\right] = \left(\frac{\theta - \epsilon}{\theta}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

9. A l'aide du lemme de Borel-Cantelli, en déduire la forte consistance de $X_{(n)}$.

   Pour tout $\epsilon \in (0, \theta)$, on a

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}\left[\left|X_{(n)} - \theta\right| \geq \epsilon\right] = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{\theta - \epsilon}{\theta}\right)^n = \frac{\theta - \epsilon}{\theta} \left(\frac{1}{1 - \frac{\theta - \epsilon}{\theta}} - 1\right) = \frac{\theta - \epsilon}{\epsilon} < +\infty$$

   Le lemme de Borel-Cantelli donne donc $X_{(n)} \xrightarrow[n \to \infty]{p.s.} \theta$.

10. Donner la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre θ^{-1}.

    Soit F_E la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre θ^{-1}, on a pour tout $t \geq 0$,

$$F_E(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\theta}\right).$$

11. Montrer que $n\left(\theta - X_{(n)}\right)$ converge en loi vers une loi exponentielle de paramètre θ^{-1}.

    Pour tout $t \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[n\left(\theta - X_{(n)}\right) \leq t\right] &= \mathbb{P}\left[-X_{(n)} \leq \frac{t}{n} - \theta\right] \\
&= \mathbb{P}\left[X_{(n)} \geq \theta - \frac{t}{n}\right] \\
&= 1 - \mathbb{P}\left[X_{(n)} \leq \theta - \frac{t}{n}\right] \\
&= 1 - \left(\frac{\theta - \frac{t}{n}}{\theta}\right)^n \\
&= 1 - \left(1 - \frac{t}{\theta n}\right)^n \\
&= 1 - \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t}{\theta n}\right)\right) \\
&\sim_{n \to \infty} 1 - \exp\left(-\frac{nt}{\theta n}\right) \\
&\to_{n \to \infty} 1 - \exp\left(-\frac{t}{\theta}\right).
\end{aligned}$$

12. Quel estimateur de θ choisiriez vous ?

    On chosit $X_{(n)}$ car il converge à la vitesse $1/n$.

Exercice 10 : (loi normale) Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2. Soit $x_1, \dots, x_n$ des réalisations des variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_n$ de même loi que X.

1. Ecrire la vraisemblance

   On a

$$L_n\left(\mu, \sigma^2\right) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\left(X_i-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right) = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-n/2} \prod_{i=1}^{n} \exp\left(-\frac{\left(X_i-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right).$$

2. En déduire les estimateur du maximum de vraisemblance de μ et σ^2.

   On a la log vraisemblance

$$l_n\left(\mu, \sigma^2\right) = -\frac{n}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

   On doit donc résoudre simultanément

$$\frac{\partial}{\partial\mu} l_n\left(\mu, \sigma^2\right) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial\sigma^2} l_n\left(\theta, \sigma^2\right) = 0.$$

   Pour le premier, on a

$$\frac{\partial}{\partial\mu} l_n\left(\mu, \sigma^2\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i-\mu}{\sigma^2} = 0 \Leftrightarrow \mu = \overline{X}_n$$

   Pour le deuxième, on a

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2} l_n\left(\overline{X}_n, \sigma^2\right) = -\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2.$$

   En multipliant l'égalité précédente par $2\sigma^4$ et en cherchant le zéro de la dérivée, on retrouve

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 =: \hat{\sigma}_n^2.$$

   Reste à vérifier que la solution est unique. Pour cela on vérifie que la log-vraisemblance est concave sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et la Hessienne

$$H\left(\overline{X}_n, \hat{\sigma}_n^2\right) = \begin{pmatrix} -\frac{n}{\hat{\sigma}_n^2} & 0 \\ 0 & -\frac{n}{\hat{\sigma}_n^4} \end{pmatrix}$$

est définie négative. On a donc les estimateurs

$$\hat{\mu}_n = \overline{X}_n \qquad \text{et} \qquad \hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}_n \right)^2 .$$

3. Commenter.

   On retrouve l'estimateur usuel de la moyenne mais l'estimateur biaisé de la variance.