Sorbonne Université Année 2020/2021

L3 Deuxième semestre

Feuille de TD 1 : Convergence de suites de variables aléatoires

Exercice 1 :

1. Rappeler les définitions de la convergence en loi, en probabilité, presque sûre et en moyenne quadratique .
   - On dit que X_n converge en loi vers X si pour toute fonction continue bornée φ, $\mathbb{E}\left[\varphi\left(X_n\right)\right]$ converge vers $\mathbb{E}\left[\varphi(X)\right]$.
   - On dit que X_n converge en probabilité vers X si pour tout $\epsilon > 0$,
   $$\mathbb{P}\left[|X_n - X| > \epsilon\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$
   - On dit que X_n converge presque sûrement vers X si
   $$\mathbb{P}\left\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\right\} = \mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega, X_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} X\right\} = 1.$$
   - On dit que X_n converge en moyenne quadratique vers X si
   $$\mathbb{E}\left[(X_n - X)^2\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$
2. Montrer que la convergence en moyenne quadratique implique la convergence en probabilité.

   Soit (X_n) une suite de variables aléatoires convergeant en moyenne quadratique vers X. Soit $\epsilon > 0$, grâce à l'inégalité de Markov,
   $$\mathbb{P}\left[|X_n - X| > \epsilon\right] \leq \frac{\mathbb{E}\left[|X_n - X|^2\right]}{\epsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$
3. Soit a une constante et (X_n) une suite de variables aléatoires. Montrer que si (X_n) converge en loi vers a, alors (X_n) converge en probabilité vers a.

   Comme on a la convergence en loi, on a en particulier que pour tout point de continuité x

de F, $F_{X_n}(x)$ converge vers $F(x)$. On obtient donc, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[|X_n - a| \geq \epsilon\right] &= \mathbb{P}\left[X_n \geq \epsilon + a\right] + \mathbb{P}\left[X_n \leq a - \epsilon\right] \\ &= 1 - F_{X_n}(\epsilon + a) + F_{X_n}(\epsilon - a) \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - F_a(\epsilon + a) + F_a(\epsilon - a)\end{aligned}$$

Or $F_a(x) = 0$ si $x < a$ et 1 sinon, et comme $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[|X_n - X| \geq \epsilon\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - 1 + 0 = 0.$$

Attention, les inégalités précédentes ne sont vraies que si les variables aléatoires X_n sont continues (sinon il faut rajouter un terme $\mathbb{P}\left[X_n = \epsilon + a\right]$).

4. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires convergeant en loi vers une constante a et soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $h(X_n)$ converge en probabilité vers $h(a)$.

   1ere version : Comme la convergence en loi vers une constante implique la convergence en probabilité, il suffit de montrer la convergence en loi de $h(X_n)$ vers $h(a)$. Comme h est continue, pour toute fonction continue bornée φ, la fonction $\varphi o h$ est une fonction continue et bornée, et comme X_n converge en loi vers a,

$$\mathbb{E}\left[\varphi\left(h\left(X_n\right)\right)\right] = \mathbb{E}\left[\left(\varphi o h\right)\left(X_n\right)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}\left[\varphi\left(h\left(a\right)\right)\right].$$

   2ème version : Soit $\epsilon > 0$. Comme h est continue, il existe $\eta > 0$ telle pour tout $x, |x - a| \leq \eta$, on ait $|h(x) - h(a)| < \epsilon$. On obtient donc

$$\mathbb{P}\left[\left|h\left(X_n\right) - h(a)\right| \geq \epsilon\right] \leq \mathbb{P}\left[|X_n - a| > \eta\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

5. Etudier la convergence de la suite (X_n) dans chacun des cas suivants :
   - $X_n = 1/n$.

     La suite est déterministe et converge vers 0, on a donc tous les types de convergence.
   - $X_n = (-1)^n$.

     La suite est déterministe et ne converge pas, on n'a donc aucun type de convergence.
   - $X_n = \mathbf{1}_{A_n}$ où A_n est une suite d'évènements et $\mathbb{P}\left[A_n\right]$ converge vers 0.

     On a $\mathbb{E}\left[X_n^2\right] = \mathbb{P}\left[A_n\right] \to 0$, et donc convergence en moyenne quadratique, en probabilité et en loi. En revanche, on n'a pas nécessairement la convergence presque sûre. On construit des ensembles A_n de la façon suivante :
     - $A_1 = [0, 1]$
     - On coupe A_1 en deux : $A_2 = [0, 1/2]$ et $A_3 = [1/2, 1]$
     - On coupe A_2 et A_3 en deux : $A_4 = [0, 1/4]$, $A_5 = [1/4, 1/2]$, $A_6 = [1/2, 3/4]$, $A_7 = [3/4, 1]$.

On considère l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1,], \mathcal{B}([0,1]), \text{Leb}[0,1])$, et on a $\mathbb{P}[A_n] = (1/2)^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \to 0$. Or pour tout $\omega \in [0,1]$, $X_n(\omega)$ n'admet pas de limite.
On ne s'attend bien évidemment pas à ce que les étudiants trouvent cet exemple où on a convergence en moyenne quadratique et pas presque sûre.

— $X_n = Z_n \mathbf{1}_{B_n}$ où Z_n converge en loi vers une variable aléatoire Z et $\mathbb{P}[B_n]$ converge vers 1.

On la convergence en loi grâce au théorème de Slutsky. Par contre, on n'a pas nécessairement la convergence en probabilité. Il suffit de considérer $B_n = \Omega$ et de reprendre l'exemple du cours, $X_n = -X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 2 : Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, à valeurs dans un ensemble A. Soit $D \subset A$ tel que $p = \mathbb{P}[X_1 \in D] \neq 0$.

Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{X_j \in D\}}$.

1. Calculer $\mathbb{E}[S_n]$ et $\mathbb{V}[S_n]$.

   Remarquons que si on note $Y_i = \mathbf{1}_{\{X_i \in D\}}$, Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p. Par linéarité de l'espérance,
$$\mathbb{E}[S_n] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[Y_i] = \sum_{i=1}^n p = pn.$$
   Comme les Y_i sont indépendantes,
$$\mathbb{V}[S_n] = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}[Y_i] = \sum_{i=1}^n p(1-p) = np(1-p).$$

2. Montrer que la suite $\frac{S_n}{n}$ converge presque sûrement vers p.
   Les Y_i sont indépendants et identiquement distribués et $\mathbb{E}[Y_1] = p$. Donc, par la loi forte des grands nombres,
$$\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} \mathbb{E}[Y_1] = p.$$

3. Calculer l'erreur quadratique moyenne $\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{n} - p\right)^2\right]$. En déduire une majoration uniforme en p de l'erreur quadratique moyenne.

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{n} - p\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right]\right)^2\right] = \mathbb{V}\left[\frac{S_n}{n}\right] = \frac{1}{n^2} V[S_n] = \frac{p(1-p)}{n}.$$

   Comme pour tout $p \in [0,1]$, $p(1-p) \leq 1/4$, il vient
$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{n} - p\right)^2\right] \leq \frac{1}{4n}.$$

4. Démontrer que pour tout $p \in]0,1[$ et pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \epsilon\right] \leq \frac{1}{4n\epsilon^2}.$$

   Grâce à l'inégalité de Markov et à la question précédente,

$$\mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \epsilon\right] \leq \frac{\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{n} - p\right)^2\right]}{\epsilon^2} \leq \frac{1}{4n\epsilon^2}$$

5. Enoncer le théorème de limite centrale que satisfait la variable $\frac{S_n}{n}$. Comme les Y_i sont indépendantes et identiquement distribuées, et $\mathbb{V}[Y_1] = p(1-p)$, on a (TLC)

$$\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - p\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, p(1-p)).$$

Exercice 3 : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires centrées, de même variance σ^2 et satisfaisant pour tout entiers $i \neq j$

$$\mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right) = \sigma^2 \alpha^{|j-i|}$$

avec $\alpha \in (0,1)$. Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

1. Calculer $\mathbb{E}[S_n]$.

   Par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}[S_n] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = 0.$$

2. Montrer que

$$\mathbb{V}[S_n] = n\sigma^2 + \frac{2\alpha\sigma^2}{1-\alpha}\left((n-1) - \alpha\frac{1-\alpha^{n-1}}{1-\alpha}\right).$$

On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\left[S_n\right] &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}\left[X_i\right] + \sum_{i \neq j} \operatorname{Cov}\left(X_i, X_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}\left[X_i\right] + 2 \sum_{i<j} \operatorname{Cov}\left(X_i, X_j\right) \\
&= n\sigma^2 + 2 \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} \sigma^2 \alpha^{j-i} \\
&= n\sigma^2 + 2\sigma^2 \sum_{j=2}^{n} \alpha^j \sum_{i=1}^{j-1} \alpha^{-i} \\
&= n\sigma^2 + 2\sigma^2 \sum_{j=2}^{n} \alpha^j \alpha^{-1} \frac{1-\alpha^{1-j}}{1-\alpha^{-1}} \\
&= n\sigma^2 + \frac{2\alpha\sigma^2}{1-\alpha} \sum_{j=2}^{n} 1 - \alpha^{j-1} \\
&= n\sigma^2 + \frac{2\alpha\sigma^2}{1-\alpha} \left((n-1) + \alpha \frac{1-\alpha^{n-1}}{1-\alpha} \right)
\end{aligned}$$

3. En déduire la convergence en moyenne quadratique de S_n/n.

   On a

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{n}\right)^2\right] = \mathbb{V}\left[\frac{S_n}{n}\right] = \frac{1}{n^2}\left(n\sigma^2 + \frac{2\alpha\sigma^2}{1-\alpha}\left((n-1) + \alpha\frac{1-\alpha^{n-1}}{1-\alpha}\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

   et donc S_n/n qui converge en moyenne quadratique vers 0.

Exercice 4 : On considère une suite de variables aléatoires (X_n). Dans chacun des cas suivants, donner la normalité asymptotique de $g(X_n)$.

1. $g : x \longmapsto \sqrt{x}$, $\theta > 0$ et

$$\sqrt{n}\left(X_n - \theta^2\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

   Comme la fonction $g : x \longmapsto \sqrt{|x|}$ est continue en θ^2, par le théorème de continuité $\hat{\theta}_n$ converge en probabilité vers θ. De plus la fonction g est dérivable en θ^2 avec $g'\left(\theta^2\right) = \frac{1}{2\theta}$, et on obtient donc, par la delta méthode

$$\sqrt{n}\left(g\left(X_n\right) - g(\theta)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \left(g'\left(\theta^2\right)\right)^2\right)$$

   i.e

$$\sqrt{n}\left(\sqrt{X_n} - \theta\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{4\theta^2}\right).$$

2. $g : x \longmapsto x^{-1}$, $\theta \neq 0$ et
$$\sqrt{n}\left(X_n - \frac{1}{\theta}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\theta^2}\right).$$

   La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \neq 0$, on a $g'(x) = \frac{-1}{x^2}$ et en particulier, $g'\left(\frac{1}{\theta}\right) = -\theta^2$. On a donc, par la delta méthode,
$$\sqrt{n}\left(g\left(X_n\right) - g\left(\frac{1}{\theta}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, g'\left(\frac{1}{\theta^2}\right)\frac{1}{\theta^2}\right)$$
   i.e
$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{X_n} - \theta\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \theta^2\right).$$

3. $g : x \longleftarrow e^x$, $\theta > 0$ et
$$\sqrt{n}\left(X_n - \ln(\theta)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, (\ln\theta)^2\right)$$

   La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(\ln\theta) = \theta$. On a donc,
$$\sqrt{n}\left(g\left(X_n\right) - g\left(\ln\theta\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, g'\left(\ln\theta\right)^2\left(\ln\theta\right)^2\right)$$
   i.e
$$\sqrt{n}\left(e^{X_n} - \theta\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \theta^2(\ln\theta)^2\right).$$

Exercice 5 : Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. Donner la loi de $Z = -\log(X)$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$F_Z(x) = \mathbb{P}\left[-\log(X) \leq x\right] = 1 - \mathbb{P}\left[X \leq \exp(-x)\right] = 1 - \exp\left(-x\right)$$
   et Z suit donc une loi exponentielle de paramètre 1.

2. Soit $Z_1, ..., Z_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de même loi que Z. Donner la normalité asymptotique de $\overline{Z}_n$.

   Les Z_i sont i.i.d et $\mathbb{E}\left[Z_1\right] = \mathbb{V}\left[Z_1\right] = 1$, donc (TLC)
$$\sqrt{n}\left(\overline{Z}_n - 1\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

3. En déduire la normalité asymptotique de
$$Y_n = \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)^{1/n}}.$$

On remarquera que

$$\log(Y_n) = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(X_i) = \overline{Z}_n.$$

On a donc $Y_n = \exp\left(\overline{Z}_n\right)$, et la fonction $g : x \longmapsto \exp(x)$ est dérivable en 1, par la delta méthode, on obtient donc

$$\sqrt{n}\left(Y_n - e\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, e^2\right)$$

Exercice 6 (Loi exponentielle translatée) : Soit Y une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1, i.e de densité f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \exp(-x)\,\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$$

Soit θ, on considère la variable aléatoire $X = Y + \theta$ de densité

$$f_\theta(x) = \exp\left(-(x-\theta)\right)\mathbf{1}_{[\theta,+\infty[}(x).$$

1. Donner les fonctions de répartitions des variables X et Y.

   Pour tout $x \geq 0$, on a
   $$F_Y(x) = \int_0^x e^{-t}dt = 1 - e^{-x}.$$
   De plus, pour tout $x \geq \theta$
   $$F_X(x) = \mathbb{P}\left[X \leq x\right] = \mathbb{P}\left[Y + \theta \leq x\right] = F_Y(x-\theta) = 1 - e^{\theta - x}.$$

2. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. On considère la variable aléatoire $Z_n = \min_{i=1,\ldots,n} X_i$. Donner la fonction de répartition de Z_n.

   Comme les X_i sont indépendants, pour tout $x \geq \theta$,
   $$\begin{aligned}
   F_{Z_n}(x) &= \mathbb{P}\left[\min_{i=1,\ldots,n} X_i \leq x\right] \\
   &= 1 - \mathbb{P}\left[\min_{i=1,\ldots,n} X_i \geq x\right] \\
   &= 1 - \mathbb{P}\left[\forall i, X_i \geq x\right] \\
   &= 1 - \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left[X_i \geq x\right] \\
   &= 1 - \left(e^{\theta - x}\right)^n \\
   &= 1 - e^{n(\theta - x)}
   \end{aligned}$$

3. En déduire que Z_n converge en probabilité vers θ.

Pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}\left[|Z_n - \theta| > \epsilon\right] = \mathbb{P}\left[Z_n - \theta > \epsilon\right] = 1 - F_{Z_n}(\theta + \epsilon) = e^{-n\epsilon} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

4. Montrer que la variable $n(Z_n - \theta)$ converge suit une loi exponentielle de paramètre 1.

   Pour tout $x \geq 0$,

$$\mathbb{P}\left[n(Z_n - \theta) \leq x\right] = \mathbb{P}\left[Z_n \leq \frac{x}{n} + \theta\right] = F_{Z_n}\left(\frac{x}{n} + \theta\right) = 1 - e^{-x} = F_Y(x).$$

Exercice 7 : (inégalité de Hölder). L'objectif de cette exercice est de démontrer l'inégalité de Hölder "généralisée" suivante. Soient $p, q, r > 0$, et X, Y deux variables aléatoires admettant respectivement un moment d'ordre p et q. Alors

$$\left(\mathbb{E}\left[|XY|^r\right]\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\mathbb{E}\left[|X|^p\right]\right)^{\frac{1}{p}} \left(\mathbb{E}\left[|Y|^q\right]\right)^{\frac{1}{q}}.$$

1. Montrer que pour tout $a, b \geq 0$

$$\frac{1}{r}(ab)^r \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

   A noter que l'on a $q = \frac{rp}{p-r}$. On considère la fonction

$$g_b : a \longmapsto \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q - \frac{1}{r}(ab)^r$$

   On a

$$g_b'(a) = a^{p-1} - a^{r-1}b^r = 0 \Leftrightarrow a = b^{\frac{r}{p-r}}$$

   et le minimum est donc atteint en $a^* = b^{\frac{r}{p-r}}$ et

$$g_b(a^*) = \frac{1}{p}b^{\frac{pr}{p-r}} + \frac{1}{q}b^{\frac{pr}{p-r}} - \frac{1}{r}b^{r\left(\frac{r}{p-r}+1\right)} = 0$$

   car $r\left(\frac{r}{p-r} + 1\right) = r\frac{r+p-r}{p-r} = \frac{rp}{p-r}$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$.

2. En déduire l'inégalité de Hölder.

   On prend $a = \frac{|X|}{\left(\mathbb{E}[|X|^p]\right)^{\frac{1}{p}}}$ et $b = \frac{|Y|}{\left(\mathbb{E}[|Y|^q]\right)^{\frac{1}{q}}}$, et on obtient

$$\frac{|X|^r}{\left(\mathbb{E}\left[|X|^p\right]\right)^{\frac{r}{p}}} \frac{|Y|^r}{\left(\mathbb{E}\left[|Y|^q\right]\right)^{\frac{r}{q}}} \leq \frac{r}{p}\frac{|X|^p}{\mathbb{E}\left[|X|^p\right]} + \frac{r}{q}\frac{|Y|^q}{\mathbb{E}\left[|Y|^q\right]}.$$

   En passant à l'espérance, on a

$$\frac{\mathbb{E}\left[|XY|^r\right]}{\left(\mathbb{E}\left[|X|^p\right]\right)^{\frac{r}{p}} \left(\mathbb{E}\left[|Y|^q\right]\right)^{\frac{r}{q}}} \leq \frac{r}{p}\frac{\mathbb{E}\left[|X|^p\right]}{\mathbb{E}\left[|X|^p\right]} + \frac{r}{q}\frac{\mathbb{E}\left[|Y|^q\right]}{\mathbb{E}\left[|Y|^q\right]} = 1.$$

En passant l'inégalité précédente à la puissance r^{-1}, on obtient

$$\frac{\left(\mathbb{E}\left[|XY|^r\right]\right)^{\frac{1}{r}}}{\left(\mathbb{E}\left[|X|^p\right]\right)^{\frac{1}{p}}\left(\mathbb{E}\left[|Y|^q\right]\right)^{\frac{1}{q}}}$$

3. Soit $(X_n)\,(Y_n)$ deux suites de variables aléatoires convergeant vers 0 respectivement à l'ordre $p > 2$ et $\frac{2p}{p-2}$, i.e

$$\mathbb{E}\left[|X_n|^p\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}\left[|Y_n|^{\frac{2p}{p-2}}\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Montrer que X_nY_n converge en moyenne quadratique vers 0.

A noter que l'inégalité de Hölder peut se réécrire comme

$$\mathbb{E}\left[|XY|^r\right] \leq \left(\mathbb{E}\left[|X|^p\right]\right)^{\frac{r}{p}}\left(\mathbb{E}\left[|Y|^q\right]\right)^{\frac{r}{q}}.$$

On pose $r = 2$ et $q = \frac{2p}{p-2}$. On a alors

$$\mathbb{E}\left[X_n^2Y_n^2\right] \leq \left(\mathbb{E}\left[|X_n|^p\right]\right)^{\frac{2}{p}}\left(\mathbb{E}\left[|Y_n|^{\frac{2p}{p-2}}\right]\right)^{\frac{p-2}{p}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$