Polytech — Année 2024/2025

L3 — Premier semestre

Contrôle continu

Exercice 1 : (Cours) On cherche à approcher la solution du système $Ax = b$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. Pour cela, on considère la méthode itérative de type II suivante :

$$Mx_{k+1} = Nx_k + b$$

1. A quelle condition est-elle consistante ?
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit convergente.

Exercice2 : (TP) A quoi sert la commande

```
numpy.linalg.cond(A)
```

Exercice 3 : (Décomposition PA= LU). Dans ce qui suit, on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 3/2 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Donner la décomposition $PA = LU$ de A. Il est demandé bien faire attention à prendre comme pivot la ligne avec le plus grand coefficient (en valeur absolue).
2. En déduire le déterminant de A.

Correction

1. On a

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & -1 & -1/2 \end{pmatrix} \qquad L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{(2)}P^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 11/4 \end{pmatrix} \qquad L^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{(3)}P^2P^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On a $\det(P) = (-1)^2 = 1$ et donc $\det(A) = \det(U) = -22$.