Polytech — Année 2024/2025

L3 — Premier semestre

Contrôle continu

Exercice 1 : (Cours) Soit A une matrice diagonalisable.

1. A quoi sert la méthode de la puissance ?
2. A quelle condition sur l'initialisation x_0 est-elle convergente ?

Exercice2 : (TP) A quoi sert la commande

```
numpy.linalg.lu(A)
```

Exercice 3 : Jacobi Vs Gauss-Seidel ? Dans ce qui suit, on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les méthodes de Jacobi et de Gauss Seidel sont-elles convergentes ?

Correction : Méthode de Jacobi : On a

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M^{-1}N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ -3/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc le polynôme caractéristique

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -3/2 \\ 0 & \lambda & 1/2 \\ 3/2 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} \lambda & 3/2 \\ -3/2 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \left(\lambda^2 + 9/4\right)$$

et on a donc les valeurs propres $0, 3/2i, -3/2i$ et donc $\rho(M^{-1}N) = 3/2 > 1$, et la méthode de Jacobi n'est donc pas nécessairement convergente.

Méthode de Gauss Seidel : On a

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -3/8 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \qquad M^{-1}N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -9/4 \end{pmatrix}$$

et on a donc $P(\lambda) = \lambda^2 \, (\lambda + 9/4)$ et on a donc comme valeur propre 0 et $-9/4$, et donc $\rho(M^{-1}N) > 1$, et la méthode n'est pas nécessairement convergente.